JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE

SOPHIE BLOCH-MERCIER
CHRISTIANE COCOZZA-THIVENT
MICHEL ROUSSIGNOL

Divers modèles stochastiques pour l'optimisation de la maintenance

Journal de la société française de statistique, tome 141, n^o 3 (2000), p. 9-21.

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2000__141_3_9_0>

DIVERS MODÈLES STOCHASTIQUES POUR L'OPTIMISATION DE LA MAINTENANCE

Sophie BLOCH-MERCIER, Christiane COCOZZA-THIVENT et Michel ROUSSIGNOL [1]

ABSTRACT

This paper is devoted to a general model in view to analyze the availability of a repairable system. The model is built to take into account both the preventive maintenance and the corrective one. The time of repair is also taken into account. The degradation of the system is assumed to be a Markov process but a general extension is given to the semi-Markov processes. Some asymptotic results are provided for the maintenance conditionally to the age and for the maintenance conditionally to the state. The improvement of the asymptotic availability is studied and some optimisation results are given. Numerical experiments are shown.

Keywords : Markov, semi-Markov, availability, maintenance.

RÉSUMÉ

Cet article est consacré à un modèle général pour l'analyse de la disponibilité d'un système réparable. Ce modèle est conçu pour prendre en compte la maintenance tant préventive que corrective. Le temps de réparation est aussi considéré. La dégradation du système est supposée régie par un processus markovien, mais une extension aux processus semi-markoviens est donnée. Des résultats asymptotiques sont fournis pour la maintenance conditionnelle à l'âge et la maintenance conditionnelle à l'état. L'amélioration de la disponibilité asymptotique est étudiée et quelques résultats d'optimisation sont donnés. Des exemples numériques sont montrés.

Mots-clés : Markov, semi-Markov, disponibilité, maintenance.

1. INTRODUCTION

Vu l'importance économique des opérations de maintenance industrielle, de nombreuses études ont été menées pour les modéliser et trouver des stratégies de maintenance préventive qui optimisent le coût de fonctionnement des systèmes étudiés. On trouvera ainsi dans [9] (1976) et [10] (1989) deux

1. Université de Marne la Vallée Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, 5 boulevard Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée cedex 2, France; e-mail : merciers@univ-mlv.fr.

revues comportant respectivement 259 et 129 références traitant de modèles de maintenance préventive pour des systèmes se détériorant aléatoirement. Depuis 1989, de nombreux autres articles ont été écrits sur ce sujet... L'objet du présent article est de présenter des travaux récents réalisés dans le groupe de recherche en fiabilité de l'Université de Marne la Vallée, qui proposent des outils pour trouver une stratégie de maintenance préventive optimale dans le cadre de systèmes se détériorant selon un processus de Markov ou un processus semi-markovien. Les différentes études ont été menées dans le cas où l'état du système n'est pas observé continûment, une panne étant en revanche détectée instantanément.

Pour un tel système, un modèle classique de politique de maintenance préventive (cf. [2] par exemple) consiste à remplacer (ou réparer) le système lorsque l'on considère qu'il a fonctionné depuis assez longtemps, l'idée étant qu'un composant « âgé » a a priori plus de « chances » de tomber en panne qu'un neuf. On parle alors de *maintenance selon l'âge*. Ce modèle, ainsi que de nombreux modèles dérivés, ont été largement étudiés dans la littérature (cf. [9] ou [10] pour de très nombreuses références, ou [1] pour quelques-unes plus récentes). La deuxième partie du présent article est consacrée à la maintenance selon l'âge : nous commençons par rappeler quelques notions de base puis nous présentons le cas où le système sans maintenance évolue selon un processus semi-markovien, qui a fait l'objet d'un travail récent.

Lorsque l'on effectue une maintenance selon l'âge, le système est maintenu au bout d'un certain temps de fonctionnement, indépendamment de son évolution réelle. Dans une modélisation un peu plus élaborée, on observe l'état du système au bout d'un certain temps. La décision de le maintenir ou de le laisser tel quel, ainsi que le type de maintenance préventive à effectuer, peut alors dépendre de l'état de dégradation observé. Le cas échéant, on procède ainsi à une succession d'*inspections* jusqu'à ce que l'on trouve le système dans un état suffisamment dégradé. Auquel cas, on l'arrête pour le maintenir. Dans un tel modèle, le temps d'attente avant la prochaine inspection peut éventuellement dépendre de l'état observé du système. Le schéma d'inspections est alors dit *séquentiel* ([2]). De nombreux schémas d'inspections (séquentiels ou non) ont été étudiés dans la littérature (cf. [10]), la plupart supposant, contrairement à nous, que la panne du système ne peut être détectée que par une inspection. Nous présentons ici un modèle de maintenance préventive liée à un schéma d'inspections séquentiel, que l'on appelle *maintenance selon l'état de dégradation*, et ceci pour un système se dégradant suivant un processus markovien. La maintenance selon l'état de dégradation est l'objet de la troisième partie de cet article.

2. MAINTENANCE SELON L'ÂGE

2.1 Modèle de base

Le modèle de base consiste en un système qui est alternativement en marche ou en panne et son évolution est décrite par un processus stochastique ne prenant que deux valeurs : marche ou panne. Etant en marche dans l'état neuf au temps initial, ce système fonctionne pendant un temps aléatoire T au bout duquel il tombe en panne. Commence alors une période de maintenance corrective de durée aléatoire R_C (indépendante de T) au bout de laquelle le système est réparé et remis dans un état neuf. La réunion de ces deux périodes constitue un cycle formé d'une période de fonctionnement suivie d'une période de maintenance corrective. A l'issue de ce cycle, le système se comporte comme à partir de l'instant initial, et des cycles indépendants de même loi se succèdent. Les durées successives de fonctionnement et de maintenance forment un processus de renouvellement alterné.

On peut décider de mettre en place une opération de maintenance préventive au bout d'un temps S. Si S est plus petit que T, le système est arrêté à l'instant S et il est remis à neuf par une opération de maintenance préventive qui dure un temps aléatoire R_P (indépendant de T). Si S est plus grand que T, une opération de maintenance corrective de durée aléatoire R_C a débuté au temps T et la maintenance préventive n'a pas lieu. La période de fonctionnement suivie de la période de maintenance préventive ou corrective constitue un cycle. A l'issue de ce cycle, le système se comporte comme à partir de l'instant initial, et des cycles indépendants de même loi se succèdent. Les temps de fin de cycle constituent des points de renouvellement au sens habituel de la théorie des processus stochastiques.

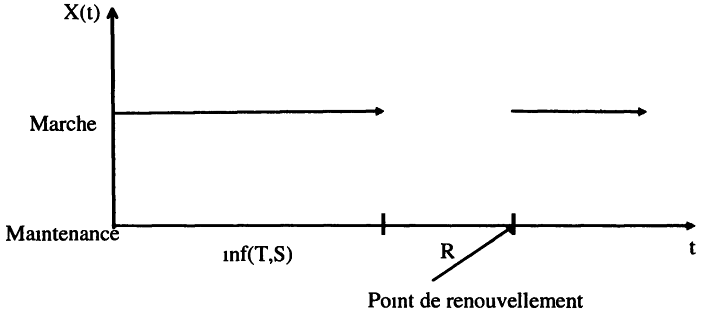

FIG 1. — Modèle de base

Optimiser la maintenance préventive consiste à choisir le temps S de manière optimale par rapport à un certain critère. On peut prendre comme critère l'indisponibilité asymptotique, c'est à dire la limite de la probabilité pour que le système soit en panne au temps t lorsque t tend vers l'infini. A l'aide des théorèmes de renouvellement, on montre que cette indisponibilité asymptotique est égale au quotient du temps moyen d'indisponibilité sur un cycle par la longueur moyenne d'un cycle. On peut prendre aussi comme critère d'optimalité un coût moyen asymptotique par unité de temps, c'est à dire la limite lorsque t tend vers l'infini du coût moyen de fonctionnement du système jusqu'au temps t divisé par t. De la même manière ce coût moyen asymptotique est égal au quotient du coût moyen de fonctionnement sur un cycle par la longueur moyenne d'un cycle.

Ces quantités sont faciles à calculer à l'aide des lois de probabilité de T, R_C, R_P, et de S, que ce soit l'indisponibilité asymptotique ou le coût moyen asymptotique par unité de temps. Par exemple l'indisponibilité asymptotique s'écrit :

$$I = \frac{\mathbb{P}(S < T)\mathbb{E}(R_P) + \mathbb{P}(S > T)\mathbb{E}(R_C)}{\mathbb{E}(inf(S,T)) + \mathbb{P}(S < T)\mathbb{E}(R_P) + \mathbb{P}(S > T)\mathbb{E}(R_C)}$$

Il est alors possible de choisir S pour que le critère choisi soit minimum. Il arrive que le minimum soit atteint pour S égal à l'infini, et dans ce cas il ne faut pas envisager de maintenance préventive. Dans d'autres cas, un minimum est atteint pour une valeur S finie. Les enjeux de l'étude sont alors de trouver un critère facilement calculable pour distinguer ces deux situations et, lorsque l'on est dans le cas où il est intéressant de faire de la maintenance préventive, de donner une formule efficace de calcul du temps de maintenance préventive optimum. Le temps de maintenance préventive S est à priori déterministe, mais des aléas peuvent se produire : dans ce cas S devient une variable aléatoire et l'optimisation est à faire relativement à la loi de S. Il est alors utile de mesurer les effets de cette situation.

Ce modèle de base a été étudié depuis longtemps (cf. [10]). Un modèle plus élaboré est présenté dans le paragraphe suivant.

2.2 Modèle plus élaboré

On considère maintenant que le système a plusieurs états de marche : un état de marche parfaite et des états de marche dégradés. Comme précédemment, s'il n'y a pas de maintenance préventive, le système partant d'un état de marche tombe en panne au bout d'un temps aléatoire T. Alors une opération de maintenance corrective débute et la loi de la durée de cette maintenance peut dépendre de l'état de dégradation qu'avait atteint le système, c'est-à-dire de l'état dans lequel il se trouvait au moment de la panne. Si on met en place une politique de maintenance préventive au bout d'un temps S, si S est plus petit que T, une opération de maintenance préventive est effectuée à la date S. La loi de la durée de maintenance préventive peut dépendre de l'état dans lequel se trouve le système à l'instant S. Après une opération de maintenance corrective ou préventive le système revient dans un état de marche, mais pas forcément dans l'état de marche parfaite. Ce retour en état de marche est décrit par une loi de probabilité m sur les états de marche : la probabilité de redémarrer dans l'état de marche i après une période d'arrêt est $m(i)$. L'évolution postérieure du système est indépendante du passé.

Le processus décrivant l'évolution du système n'est plus un processus de renouvellement, c'est un processus de renouvellement markovien (cf. [6]) : les états successifs dans lequel le système redémarre après une période d'arrêt forment une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est m.

Alors l'indisponibilité asymptotique vaut

$$I = \frac{d}{1+d}$$

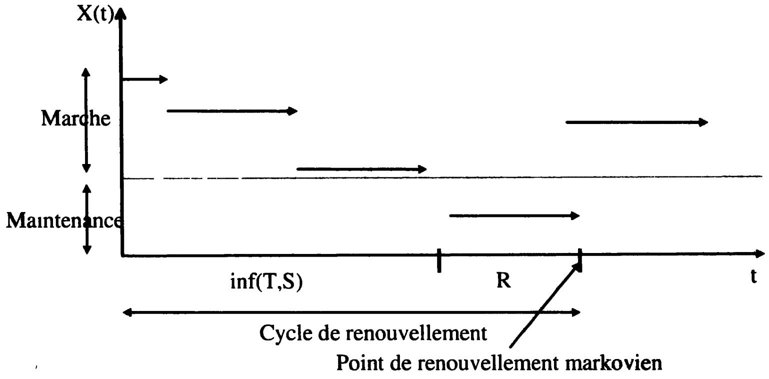

FIG 2. — Modèle plus élaborée

avec

$$d = \frac{\sum_{i\in\mathcal{M}} m(i)\left(\mathbb{E}_i(1_{(S<T)}\, R_P) + \mathbb{E}_i(1_{(S>T)}\, R_C)\right)}{\sum_{i\in\mathcal{M}} m(i)\mathbb{E}_i(inf(S,T))} \qquad (1)$$

en notant $\mathcal{M}$ l'ensemble des états de marche du système et $\mathbb{E}_i$ l'espérance conditionnelle sachant que l'état initial vaut i.

Nous avons une formule analogue pour le coût moyen asymptotique par unité de temps.

Pour calculer les quantités intervenant dans ces formules il faut préciser le modèle de dégradation du sytème.

2.3 Modèle semi-markovien

Le modèle présenté ici est étudié dans le troisième chapitre de la thèse de S. Bloch-Mercier ([4]) effectuée sous la direction de M. Roussignol. Une version abrégée (et dans un cadre un peu moins général) peut être trouvée dans [3]. Le modèle considéré est du type décrit au paragraphe précédent avec une évolution dans les états de marche selon un processus semi-markovien. En utilisant la formule (1), S. Bloch-Mercier calcule l'indisponibilité asymptotique (ou la disponibilité asymptotique A_∞) en fonction de la paramétrisation du processus semi-markovien, de la loi de S, de m, de $\mathbb{E}(R_C)$ et de $\mathbb{E}(R_P)$. Elle envisage aussi le cas où les redémarrages après une opération de maintenance préventive ou corrective se font selon des lois différentes.

L'amélioration de la disponibilité asymptotique grâce à la politique de maintenance préventive est étudiée : elle montre ainsi que, si le taux de panne du système initial est croissant (c'est-à-dire si T est IFR), la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si les opérations de maintenance préventive ne sont pas trop longues en moyenne, une borne maximale pour $\mathbb{E}\,(R_p)$ étant fournie et testée numériquement. Les cas où le taux de panne est décroissant (cas DFR) ou ne change qu'une seule fois de sens de variation sont aussi étudiés, des bornes maximales pour $\mathbb{E}(R_p)$ étant là encore fournies, le cas échéant. Les résultats obtenus dans les cas IFR et DFR n'ont bien sûr rien de surprenant et généralisent simplement d'anciens résultats bien connus (cf. [9]). Malgré tout, même dans le cas IFR, nous n'avons pas trouvé ailleurs de bornes explicites pour les durées moyennes de maintenance préventive en-deçà desquelles la politique de maintenance s'avère utile.

S. Bloch-Mercier s'intéresse aussi à l'optimisation de la politique de maintenance préventive et démontre que l'optimum est atteint par un temps de maintenance S déterministe. Là encore, ce type de résultat est relativement classique et a été obtenu à diverses reprises pour d'autres modélisations ([2] e.g.).

Une optimisation numérique est menée sur divers exemples. Nous en donnons un ici.

EXEMPLE 2.1. — On considère un système formé de quatre composants identiques et indépendants en redondance passive, que l'on suppose numérotés de 1 à 4. Cela signifie que le composant 1 est au départ actif, les autres étant en attente. Lorsque le composant 1 tombe en panne, on essaye le deuxième. Celui-ci démarre (instantanément) avec une probabilité γ ($0 < \gamma < 1$). S'il refuse de démarrer, on essaye alors le composant 3, qui démarre lui-même avec une probabilité γ et ainsi de suite. On suppose que la durée de vie d'un composant suit la loi GAMMA de paramètres λ et μ et que l'on ne peut pas réparer les composants tant que le système fonctionne. On note $\imath$ l'état où $i-1$ composants sont en panne, pour $\imath \in \{1, ..., 5\}$. Une maintenance corrective remet le système dans l'état 3, une opération de maintenance préventive le remet dans l'état 1.

D'un point de vue numérique, on prend :

$$\lambda = 5, \mu = 1, \gamma = 0.9, \mathbb{E}(R_c) = 2, \mathbb{E}(R_p) = 1.$$

La figure suivante représente la disponibilité asymptotique A_∞ du système maintenu lorsque S suit une loi GAMMA en fonction de l'écart-type et de la moyenne de cette loi.

On peut observer sur cette figure que la disponibilité asymptotique optimale (A_∞^{opt}) est obtenue pour un écart-type nul, c'est-à-dire pour une variable S^{opt} déterministe ($S^{opt} \simeq 10.5061$, $A_\infty^{\imath n\imath} = 0.8261$ et $A_\infty^{opt} = 0.9010$).

On constate aussi que, lorsque S a une moyenne éloignée de S^{opt} (par exemple de l'ordre de 20), la disponibilité asymptotique du système augmente avec l'écart-type. Cela signifie que, s'il n'est pas possible de maintenir le système à l'instant optimal c_{opt} (ou si cet instant est mal déterminé, cas fréquent dans l'industrie), il peut être préférable d'utiliser une loi plus étalée qu'une masse de Dirac pour le temps d'attente de la maintenance.

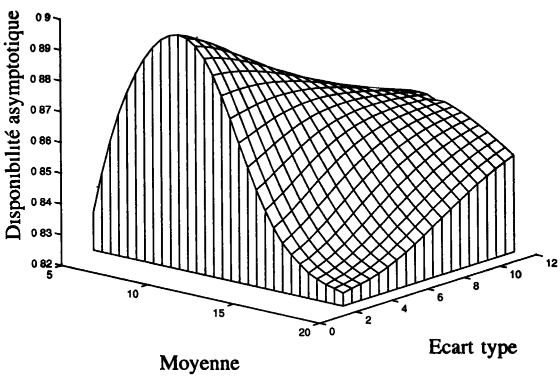

FIG 3. — Disponibilité asymptotique A_∞ en fonction de la moyenne et de l'écart type de la loi de S.

3. MAINTENANCE SELON L'ÉTAT DE DÉGRADATION

3.1 Modèle étudié

Nous allons maintenant étudier une politique de maintenance préventive qui tient compte de l'état du sytème à des instants d'inspection.

Nous supposons que le système a plusieurs états de marche, un état de marche parfaite et des états de marche dégradés. A l'instant initial, il est dans un état de marche i. Un premier instant d'inspection S_1 est prévu, de loi ρ_i. A cet instant, trois cas peuvent se présenter :

– si le système est en marche et peu dégradé, on ne fait rien et on prévoit la date de la prochaine inspection S_2 selon l'état du système,

– si le système est en marche et assez dégradé, on effectue une maintenance préventive,

– si le système est en panne, l'inspection n'a aucune incidence et la maintenance corrective commencée continue.

Si on est dans le premier cas, au temps S_2, on adopte la même stratégie, et ainsi de suite. On peut donc être amené à faire plusieurs inspections avant d'effectuer une maintenance préventive. On peut aussi subir une panne et alors effectuer une maintenance corrective.

A l'issue d'une maintenance le système revient dans un état de marche selon une loi de probabilité qui peut dépendre, selon le degré de généralité du modèle choisi, du type de maintenance et de l'état du système au moment de l'inspection ou de la panne.

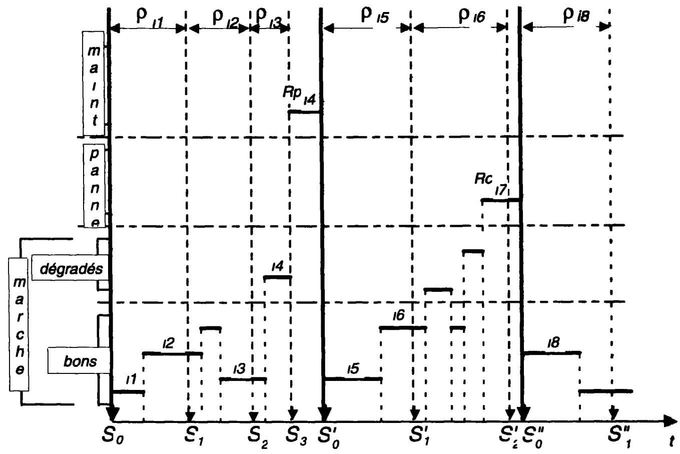

FIG 4. — Schéma de la politique de maintenance préventive.

De même, les durées de maintenance ont des lois qui peuvent dépendre de l'état du système au moment de l'inspection ou de la panne.

La politique de maintenance préventive consiste à choisir d'une part le seuil de dégradation du système à partir duquel on effectue la maintenance préventive et d'autre part, si le système n'a pas atteint ce seuil, le temps au bout duquel se fera la prochaine inspection en fonction de l'état du système au moment de l'inspection.

Ce type de modèle a été étudié dans [8] lorsque la dégradation du système est modélisée par un processus gamma. Lorsque l'évolution du système sur les états de marche se fait selon un processus markovien de saut, il a été étudié dans [4], [5] et dans [2]. Ces deux travaux traitent du même modèle, l'un avec une méthode purement markovienne et l'autre avec une méthode de renouvellement markovien.

3.2 Méthode purement markovienne

C. Cocozza-Thivent a étudié dans [2] le modèle précédent en décrivant l'évolution du système par un processus de Markov.

Si on note $X(t)$ l'état du système au temps t, $X(t)$ est un processus stochastique de sauts à valeurs dans espace fini E, mais il n'est pas markovien car les lois des durées de maintenance et des durées inter-inspections sont quelconques.

On définit une variable $Y(t)$ par :

– si l'état $X(t)$ du système est un état marche, $Y(t)$ est la durée écoulée depuis la dernière inspection,

– si l'état $X(t)$ du système est un état de maintenance, $Y(t)$ est la durée écoulée depuis le début de cette maintenance.

Le processus $(X(t), Y(t))$ est un processus de Markov à valeurs dans $E \times \mathbb{R}_+$. En ajoutant $Y(t)$, on ajoute suffisamment d'information pour rendre le couple $(X(t), Y(t))$ markovien.

On peut alors utiliser la « technologie » des processus de Markov. On commence par déterminer la loi stationnaire π du processus de Markov $(X(t), Y(t))$ en procédant comme suit :

- on écrit le générateur infinitésimal L,
- on obtient les équations caractérisant la loi stationnaire π en écrivant que $\pi L f = 0$ pour une classe de fonctions tests f,
- ces équations se présentent sous forme de systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants, et d'équations satisfaites par les conditions initiales.
- on résout les systèmes différentiels et on obtient des formules explicites qui font intervenir :

  – les données du modèle que sont la matrice génératrice A du processus markovien de sauts décrivant l'évolution du système sur les états de marche, les lois des maintenances et des durées inter-inspections,

  – les conditions initiales relatives à ces équations différentielles,
- on montre que, sous des conditions d'irréductibilité raisonnables, les conditions initiales sont solutions d'un système d'équations linéaires de rang 1.

Dans les cas usuels, c'est-à-dire en particulier lorsque les durées de maintenance ont des lois qui ne dépendent que de l'état du système au moment de l'inspection ou de la panne et non de l'état dans lequel le système va être ramené à la fin de cette maintenance, la première marginale de la loi π, qui donne la loi limite de $X(t)$, lorsque t tend vers l'infini, ne dépend que des moyennes des lois des durées des maintenances et non de la forme de ces lois. Par contre elle dépend de la forme des lois inter-inspections et pas seulement de leurs valeurs moyennes.

L'indisponibilité asymptotique du système s'obtient immédiatement à partir de la première marginale de π.

La fonction de coût étudiée tient compte des coûts des déplacements pour inspection ou maintenance, des coûts de remplacement des matériels (qui sont fonction des états de dégradation ou de panne du système), des coûts d'indisponibilité en différenciant l'indisponibilité prévisible due aux maintenances préventives de l'indisponibilité non prévisible due aux maintenances correctives.

Pour obtenir le coût moyen asymptotique il faut donc calculer le nombre moyen d'inspections ou de maintenances d'un type donné, par unité de temps. Cela revient à trouver la limite, lorsque t tend vers l'infini, de $\mathbb{E}(N(t))/t$, où

$N(t)$ est la fonction de comptage des inspections ou des maintenances du type considéré. Cela s'obtient, par une méthode de martingale : en utilisant le générateur infinitésimal du processus rendu markovien et quelques formules de calcul stochastique, on calcule le compensateur du processus de comptage $N(t)$, et le résultat en découle facilement. Comme pour la disponibilité asymptotique, on remarque que, dans les cas usuels, les lois des durées de maintenance n'interviennent que par leurs valeurs moyennes.

On peut mener numériquement, sur des exemples, une optimisation de la politique de maintenance préventive. On constate que le coût optimum est obtenu pour des temps d'inspections déterministes.

3.3 Méthode renouvellement Markovien

S. Bloch-Mercier a étudié dans le deuxième chapitre de [4] le modèle précédent en utilisant des techniques de renouvellement markovien. Comme dans la deuxième partie, les instants de fin de maintenance sont des instants de renouvellement markoviens. On peut alors calculer l'indisponibilité asymptotique ou le coût moyen asymptotique par unité de temps à l'aide du comportement sur un cycle. Ainsi l'indisponibilité asymptotique vaut lorsque les lois de retour après maintenance préventive et corrective sont égales :

$$I = \frac{d}{1+d}$$

avec

$$d = \frac{mB((I-b)(-A_1^{-1})A_2\mathbb{E}(R_C) + b\mathbb{E}(R_P))}{mB(I-b)(-A_1^{-1})1}$$

avec :

- A_1, A_2 blocs de la matrice génératrice du processus de Markov sur les états de marche,
- b matrice définie par $b_{i,j} = \int_0^\infty P_t(i,j)\ \rho_i(dt)$ avec P_t probabilité de transition du processus de Markov sur les états de marche et ρ_i la loi du premier temps d'inspection si i est l'état initial ($b_{i,j}$ représente la probabilité que le système soit dans l'état j lors de la première inspection sachant qu'il est parti de l'état i),
- B matrice définie à partir de la matrice b,
- $\mathbb{E}(R_C)$ et $\mathbb{E}(R_P)$ vecteur des espérances des durées de maintenance,
- m loi de probabilité des retours en états de marche après maintenance.

A partir de cette formule, S. Bloch-Mercier donne une condition suffisante pour que la maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique. Plus précisément, elle montre que, si les états sur lesquels on effectue les opérations de maintenance sont plus dégradés que l'état moyen de redémarrage après une période d'arrêt, la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si les opérations de maintenance préventive ne sont pas trop longues en moyenne, des bornes étant fournies (et testées numériquement) pour les durées moyennes de maintenance. Elle a donc le même type de résultat que pour la maintenance selon l'âge. En revanche, contrairement à la maintenance selon l'âge, elle n'a pas besoin ici de faire d'hypothèses supplémentaires sur l'évolution du système en marche (IFR par exemple).

S. Bloch-Mercier démontre aussi que, si le système se dégrade en fonctionnant (matrice génératrice du processus markovien sous-jacent triangulaire supérieure), la politique de maintenance préventive optimale est obtenue pour des temps d'inspections déterministes. Elle sait par ailleurs calculer les caractéristiques de la politique de maintenance optimale.

Nous terminons ce paragraphe en donnant un exemple d'étude.

3.4 Exemple

Nous considérons un système de type « k sur n » ($n \geqslant k \geqslant 1$), composé de n composants identiques et indépendants, non réparables tant que le système fonctionne, de taux de défaillance constant λ (non nul). Le système fonctionne si et seulement si au moins k composants fonctionnent. On note $\imath$ l'état où $i-1$ composants sont en panne, pour $1 \leqslant \imath \leqslant n-k+2$.

Les inspections ne donnant pas lieu à une maintenance se font sur les états 1 à q, où q varie de 1 à $n-k$. Une opération de maintenance préventive ou corrective remet le système dans l'état 1.

Numériquement, nous prenons :

$k=2$, $\lambda=1$, $\mathbb{E}(R_C)=\frac{1}{50}$, $\mathbb{E}((R_P)_\jmath)=\frac{\jmath}{1000}$, pour tout $q+1 \leqslant \jmath \leqslant m$.

Les résultats numériques donnés par les méthodes purement markoviennes et par la théorie du renouvellement markovien sont identiques.

Pour chaque valeur de n, le **tableau 1** ci-dessous donne la disponibilité asymptotique du système initial $A_\infty^{\imath n \imath}$ et pour chaque valeur de $1 \leqslant q \leqslant n-2$, la disponibilité asymptotique optimale du système maintenu A_∞^{opt} ainsi que son argument $\left(c_1^{opt}, c_2^{opt}, \ldots, c_q^{opt}\right)$, en italiques, juste en-dessous.

D'après le **tableau 1**, la politique de maintenance préventive améliore dans tous les cas la disponibilité asymptotique. De plus, celle-ci est optimale lorsque l'on effectue des opérations de maintenance uniquement sur l'état de marche le plus dégradé (cas $q=n-2$) et cela, pour toutes les valeurs de n.

On peut aussi remarquer que les valeurs optimales des durées inter-inspections c_1^{opt}, c_2^{opt}, ..., c_q^{opt} sont décroissantes ($c_1^{opt} \geqslant c_2^{opt} \geqslant \ldots \geqslant c_q^{opt}$). Cela signifie que, comme on pouvait s'y attendre, **plus le système se dégrade, plus il faut l'inspecter souvent.**

TABLEAU 1. — Disponibilité asymptotique initiale et optimale.

n	A_{∞}^{ini}	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$	$q=7$
3	0.9766	0.9940						
4	0.9819	0.9924 *0.0852*	0.9949 .					
5	0.9847	0.9922 *0.3020*	0.9935 *0.0848* *0.0680*	0.9949 . .				
6	0.9864	0.9923 *0.4861*	0.9928 *0.3524* *0.2881*	0.9936 . .	0.9948 . .			
7	0.9876	0.9923 *0.6447*	0.9925 *0.5916* *0.4978*	0.9929 *0.4225* *0.3673* *0.3004*	0.9935 . . .	0.9945 . . .		
8	0.9885	0.9923 *0.7957*	0.9923 *0.7801* *0.6772*	0.9924 *0.7110* *0.6255* *0.5271*	0.9928 *0.5093* *0.4589* *0.3986* *0.3260*	0.9934	0.9943	
9	0.9892	0.9921 *0.9487*	0.9922 *0.9453* *0.8440*	0.9922 *0.9249* *0.8296* *0.7223*	0.9923 *0.8456* *0.7646* *0.6734* *0.5686*	0.9926 *0.6148* *0.5665* *0.5093* *0.4420* *0.3615*	0.9931	0.9940 . . . . .

4. CONCLUSION

On sait optimiser la politique de maintenance pour des modèles assez élaborés. Cependant on ne sait guère faire mieux que le cas d'une évolution markovienne sur les états de marche. Pour une politique de maintenance selon l'âge, on arrive à traiter le cas d'une évolution semi-markovienne sur les états de marche. Mais on ne sait pas faire de même pour une politique de maintenance selon l'état de dégradation.

Dans ces modèles, les lois des durées de maintenance sont quelconques, mais les maintenances interviennent lors d'un « arrêt global » du système. On ne sait pas traiter des maintenances partielles de durée aléatoire de loi quelconque alors que le système continue à fonctionner, c'est-à-dire à pouvoir se dégrader.

Par adjonction d'une variable continue supplémentaire, on a pu décrire l'évolution d'un système à prioiri non markovien par un processus markovien. On peut penser que l'on peut traiter des modèles plus généraux par cette méthode. Le problème est que si on a besoin d'ajouter deux variables continues supplémentaires, c'est beaucoup plus compliqué...

RÉFÉRENCES

[1] AVEN T., JENSEN U. (1999). *Stochastic Models in Reliability.* Applications of Mathematics, **41**. Springer-Verlag, New York.

[2] BARLOW R. E., PROSCHAN F. (1996, first edition 1965). *Mathematical Theory of Reliability,* Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia.

[3] BLOCH-MERCIER S. (2000). Stationary availability of a semi-Markov system with random maintenance, *Applied Stochastic Models in Business and Industry,* vol. 16, pp. 219–234.

[4] BLOCH-MERCIER S. (2000). Modèles et optimisation de politiques de maintenance de systèmes, *Thèse de l'Université de Marne-la-Vallée,* décembre 2000.

[5] BLOCH-MERCIER S. (2000). Coût moyen asymptotique d'un système markovien soumis à une politique de maintenance préventive, *Actes des XXXIIe Journées de Statistique Mai 2000 Fès,* p. 148-151.

[6] COCOZZA-THIVENT C. (1997). *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes,* Mathématiques et Applications 28, Springer.

[7] COCOZZA-THIVENT C. (2000). A model for a dynamic preventive maintenance policy, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis,* vol. 13, n°4, pp. 321–346.

[8] DIEULLE L., BERENGUER C., GRALL A., ROUSSIGNOL M. (2000). Un modèle de maintenance conditionnelle continu, *Actes des XXXIIe Journées de Statistique Mai 2000 Fès,* p. 318-321.

[9] PIERSKALLA W. P., VOELKER J. A. (1976). A survey of maintenance models : the control and surveillance of deteriorating systems, *Naval Research Logistics,* vol. 23, pp. 353–388.

[10] VALDEZ-FLORES C., FELDMAN R. M. (1989). A survey of preventive maintenance models for stochastically deteriorating single-unit systems, *Naval Research Logistics,* vol. 36, n°4, pp. 419–446.