Comportement Asymptotique d'un Exemple de Fiabilité Dynamique

DESGROUAS Margot - MERCIER Sophie
Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, Université de Marne-la-Vallée
5 Bd Descartes, Champs-sur-Marne,
77454 Marne-La-Vallée Cedex 2, France.
Tel. : 01.60.95.76.87 - Fax : 01.60.95.75.45 - margot.desgrouas@univ-mlv.fr

Résumé : En fiabilité dynamique, on modélise l'évolution d'un système à l'aide d'un processus de Markov dans un espace d'état non dénombrable. Les taux de transition du système peuvent varier en fonction de conditions dites "environnementales", qui satisfont elles-mêmes des équations différentielles ordinaires, fonction de l'état du système. Cet article expose la première étape d'une thèse destinée à étudier le comportement asymptotique de ces processus. Cette première étape consiste à comparer différentes méthodes d'étude du comportement asymptotique sur un exemple bien particulier. Dans cet article, le système prend ses valeurs dans $\{1, 2\}$. La variable environnementale prend ses valeurs dans un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et est analytiquement calculable. Les deux premières méthodes permettant de traiter l'existence et l'unicité d'une loi stationnaire proviennent d'articles de Costa et Dufour qui relient le problème au même problème pour une chaîne de Markov associée. Dans les deux autres méthodes nous utilisons des techniques régénératives pour le processus à temps continu, ce qui permet d'obtenir en plus des résultats de convergence.

Abstract : Markov processes with non countable state-space are used in dynamic reliability to model the evolution of an item. The transition rates of such an item may vary with environmental conditions, which fulfill ordinary differential equations depending on the current state of the item. This article gives the first part of a thesis intended to study the asymptotic behavior of these processes. This first step consists in comparing different methods for studying asymptotic behavior on quite a simple case. In this document, the item takes its values in $\{1, 2\}$ and environmental conditions take their values in a compact set of $\mathbb{R}$ and is analytically calculable. The first two methods which provide us with existence and uniqueness of stationary distributions come from Costa and Dufour's articles, which connect the problem to the same problem on an associated Markov chain. In the other two methods, we use some regenerative techniques with the continuous time process, which provide us with some convergence results too.

Mots-clés : Fiabilité dynamique, Processus de Markov déterministes par morceaux (PDMP), Loi invariante, Processus régénératif

Keywords : Dynamic reliability, Piecewise Deterministic Markov Processes (PDMP), Stationnary distribution, Regenerative process

1 - Introduction - Notations

En fiabilité dynamique, on modélise l'évolution d'un système à l'aide d'un processus de Markov $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans un espace d'état non dénombrable contrairement au cadre usuel de la fiabilité classique. Cet article décrit la première étape d'une thèse destinée à étudier le comportement asymptotique de ces processus. S'il y a convergence vers une loi invariante que l'on peut calculer, les quantités asymptotiques (comme par exemple la disponibilité asymptotique ou le MUT) pourront être déterminées à partir de cette loi invariante. Dans ce document, il s'agit de comparer sur un exemple très simple certaines méthodes permettant de conclure sur l'existence et l'unicité d'une loi stationnaire ainsi que la convergence du processus. Nous essayerons par la suite de généraliser le procédé qui semble le plus approprié.

Dans ce document, on considère que l'état "physique" du système I_t prend ses valeurs dans un espace d'état fini $\{1,2\}$ et que la variable dite "environnementale" X_t décrit une condition à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme, par exemple, la température. De façon générale, les taux de saut à partir de l'état i dépendent de la variable environnementale à l'instant t : $\lambda(i, X_t)$. Ici, ils sont supposés constants égaux à λ_1 et λ_2. L'évolution de la variable environnementale X_t est décrite par des équations différentielles qui dépendent de l'état du système. Plus précisément, sachant l'état du système $I_t = i$ pour $t \in [a,b]$, la variable X_t est décrite par l'équation suivante : pour tout $t \in [a,b]$, $\frac{dX_t}{dt} = \mathbf{v}(i, X_t)$. Nous notons $g(i,x,t)$ la solution de cette équation telle que $g(i,x,0) = x$. Ici, ces équations sont résolubles :

$$\begin{cases} \mathbf{v}(1,x) & = \omega_1(C-x) \quad (\omega_1 > 0) \\ \mathbf{v}(2,x) & = -\omega_2 x \quad (\omega_2 > 0) \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} g(1,x,t) = C - e^{-\omega_1 t}(C-x) \\ g(2,x,t) = x e^{-\omega_2 t} \end{cases}$$

On note $(T_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ les instants de sauts du processus $(I_t)_{t\geq 0}$. La figure 1 représente un exemple de trajectoire de la variable environnementale en fonction de l'état du système : tant que $t \in [T_n, T_{n+1}[$, on reste dans l'état $I_t = i$ et la variable X_t suit la trajectoire déterministe $g(i, X_{T_n}, t - T_n)$.

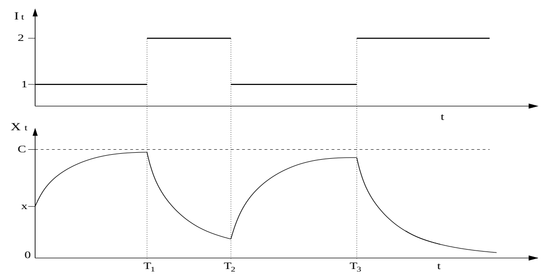

FIG. 1 – Exemple de processus $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$

La première méthode exposée applique à ce processus les résultats de l'article de Costa [Costa 90] qui utilise la chaîne de Markov sous-jacente $(I_{T_n}, X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour montrer l'existence d'une loi invariante. Pour la deuxième méthode, nous utilisons un article de Costa et Dufour [Costa 99] qui propose d'aborder le problème avec une autre chaîne de Markov et des hypothèses moins restrictives sur les taux. Dans les deux autres méthodes, nous étudions directement le processus de Markov à temps continu $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$, pour l'une en montrant qu'il est Harris récurrent au sens de Asmussen [Asmussen 87],ce qui permet d'obtenir la convergence en variations totales vers la loi stationnaire, pour l'autre en montrant qu'il est régénératif, ce qui nous donne la convergence en loi.

2 - Résolution par Costa

2.1 - Principe

Dans son article [Costa 90], Costa montre que le problème de l'existence et de l'unicité de lois stationnaires pour le processus de Markov déterministes par morceaux (PDMP) est équivalent au même problème pour la chaîne de Markov sous-jacente $(I_{T_n}, X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sous certaines conditions portant sur les paramètres du PDMP. Il donne aussi le lien entre les lois stationnaires du PDMP et les lois stationnaires de la chaîne de Markov.

Théorème 1 *Soit* Π_{PDMP} *l'ensemble des lois stationnaires pour le PDMP et* Π_{MC} *l'ensemble des lois stationnaires pour la chaîne de Markov sous-jacente. Notons*
$\Pi^\bullet_{\text{PDMP}} := \left\{\mu \in \Pi_{\text{PDMP}} ; \sum_{i\in E} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda(i,x)\mu(i,dx) < \infty\right\}$,
$\Pi^\bullet_{\text{MC}} := \left\{\pi \in \Pi_{\text{MC}} ; \sum_{i\in E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty e^{-\Lambda(t,i,x)} dt \pi(i,dx) < \infty\right\}$, *avec* $\Lambda(t,i,x) := \int_0^t \lambda(i, g(i,x,s))ds$.
Il existe deux applications $\mathcal{T}$ *(sur* $\Pi^\bullet_{\text{PDMP}}$ *) et* $\mathcal{P}$ *(sur* $\Pi^\bullet_{\text{MC}}$ *) (explicitées dans [Costa 90]) telles que*

$$\begin{array}{ccc} \pi \in \Pi^\bullet_{\text{MC}} & \Longrightarrow & \mathcal{P}\pi \in \Pi_{\text{PDMP}} \\ \mu \in \Pi^\bullet_{\text{PDMP}} & \Longrightarrow & \mathcal{T}\mu \in \Pi_{\text{MC}} \end{array}$$

De plus, s'il existe $\lambda_{\min}$ *et* $\lambda_{\max}$ *tels que* $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(i,x) \leq \lambda_{\max} < \infty$, *alors* $\Pi^\bullet_{\text{PDMP}} = \Pi_{\text{PDMP}}$,

$\Pi^{\bullet}_{\mathrm{MC}} = \Pi_{\mathrm{MC}}$ *et* $\mathcal{PT} = Id, \quad \mathcal{TP} = Id.$

2.2 - Application

Pour appliquer ce théorème, il faut connaître le noyau de la chaîne de Markov sous-jacente afin de savoir si celle-ci admet une probabilité invariante. Pour cet exemple, le calcul de ce noyau est explicite et donne :

$$\forall x \in]0, C[\quad \begin{cases} \bar{Q}(1, x, 2, dy) = \mathbf{1}_{[x,C[}(y) \frac{\lambda_1}{\omega_1} \left(\frac{C-y}{C-x}\right)^{\frac{\lambda_1}{\omega_1}} \frac{1}{C-y} dy \\ \bar{Q}(2, x, 1, dy) = \mathbf{1}_{]0,x]}(y) \frac{\lambda_2}{\omega_2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\lambda_2}{\omega_2}} \frac{1}{y} dy \end{cases}$$

Afin de montrer que cette chaîne admet une unique loi invariante, différentes approches sont possibles :

1. le calcul direct : $\bar{\pi}\overline{Q} = \overline{\pi}$,
2. une méthode générale classique avec condition de Lyapunov,
3. en utilisant un résultat du livre [Davis 93] avec un espace d'état compact.

La première approche est utilisable car le noyau $\overline{Q}$ a des propriétés bien particulières. Tout d'abord, comme $\overline{Q}$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\bar{\pi}(i, dx)$ admet également une densité $\bar{f}_i(x)$, pour $i \in \{1, 2\}$. Les propriétés de $\overline{Q}$ entraînent par ailleurs la relation suivante : $\frac{\omega_2}{\lambda_2} x \bar{f}_1(x) = \frac{\omega_1}{\lambda_1}(C - x)\bar{f}_2(x)$. Cette égalité nous permet de terminer les calculs et de conclure qu'il existe une unique loi invariante pour la chaîne de Markov sous-jacente et donc pour le processus à temps continu.

La seconde méthode est plus générale. Elle utilise le théorème 4.II.16 de [Duflo 90] :

Théorème 2 *Soit une chaîne de Markov sur* $\{1, 2\} \times \mathbb{R}$ *de transition* $\bar{Q}$ *satisfaisant les hypothèses suivantes :*

1. $\bar{Q}$ *est fellérienne* ($\forall g \in \mathcal{C}_b, \quad \bar{Q}g \in \mathcal{C}_b$) *;*
2. *Il existe une fonction de Lyapunov* V*, fonction continue de* $\{1, 2\} \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *satisfaisant les propriétés suivantes pour tout* $i \in E$ *:*
$$\lim_{||x|| \to \infty} V(i, x) = +\infty \qquad \overline{\lim}_{||x|| \to \infty} \frac{\bar{Q}V(i,x)}{V(i,x)} < 1$$

Alors il existe au moins une loi stationnaire μ *telle que* $\mu(V) < \infty$.

D'après sa forme, $\overline{Q}$ est fellérienne et en prenant la fonction $V(i, x) = \mathbf{1}_{i=1}x^2 + \mathbf{1}_{i=2}(C - x)^2$, la deuxième propriété est vérifiée, donc $\overline{Q}$ admet une loi stationnaire et $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ aussi.

La troisième méthode applique un corollaire du livre [Davis 93] (34.42) en utilisant le fait que l'ensemble d'arrivée $\{1, 2\} \times [0, C]$ est compact. On montre alors que la chaîne de noyau $\overline{Q}$ est φ-irréductible.

2.3 - Synthèse

L'aboutissement de l'approche par calcul direct est lié à la forme particulière de $\overline{Q}$: dans une étape, on reconnaît une relation entre $\overline{f}_1$ et $\overline{f}_2$. Ce calcul ne paraît pas réalisable sur un processus plus général. La deuxième méthode, plus théorique, paraît très simple sur cet exemple, mais le choix de la fonction V est intimement lié à la forme de $\overline{Q}$. Quand à l'utilisation du corollaire 34.42 de [Davis 93], elle nécessite de montrer la φ-irréductibilité, ce qui n'est souvent pas évident à faire, surtout lorsque le noyau $\overline{Q}$ n'est pas explicite. De plus, la méthode décrite dans le paragraphe 3 utilise également la φ-irréductibilité en élargissant les hypothèses. En résumé, pour utiliser les résultats de l'article [Costa 90], il semble indispensable de bien connaître la forme du noyau $\overline{Q}$, ce qui n'est pas le cas dans un cadre plus général.

Par ailleurs, Costa a montré que la relation bijective entre les lois stationnaires de la chaîne sous-jacente et du processus est vérifiée pour un taux de saut compris entre deux constantes strictement positives. Or, dans certains exemples qui ne vérifient pas ces hypothèses, il existe une loi invariante pour le processus, mais pas pour la chaîne de Markov associée et inversement.

3 - Résolution par Costa et Dufour

3.1 - Principe

Dans [Costa 99], Costa et Dufour ont introduit un nouveau noyau markovien G :

$$G(i,x,j,dy) = K(i,x,j,dy) + L(i,x,j,dy),$$

avec $L(i,x,j,dy) = \int_0^\infty e^{-s(1+\lambda_i)}\delta_{g(i,x,s)}(dy)\mathbf{1}_{j=i}ds$,
et $K(i,x,j,dy) = \int_0^\infty \lambda_i e^{-s(1+\lambda_i)}\mu(i,j,g(i,x,s))(dy)ds$.
Ils ont alors démontré que le problème de l'existence et l'unicité d'une mesure invariante pour le PDMP est équivalent à l'existence d'une mesure σ-finie invariante pour la chaîne de Markov générée par le noyau G satisfaisant une condition de bornitude. Cette équivalence ne nécessite plus que les taux soient minorés par une constante strictement positive.
Notations : pour une mesure φ et deux noyaux G et H, on note :

$$\varphi G(i,dy) = \sum_{j\in\{1,2\}} \int_0^C G(j,x,i,dy)\varphi(j,dx)$$
$$GH(i,x,j,dy) = \sum_{k\in\{1,2\}} \int_0^C H(k,z,j,dy)G(i,x,k,dz)$$

Soit $(I'_n, Y_n)_n$ la chaîne de Markov de noyau G.

Définition 1 (φ-irréductible) *$\{(I'_n,Y_n)\}$ est φ-irréductible s'il existe une mesure φ sur $(\{1,2\}\times]0,C[,\mathcal{A})$ telle que, quand $\varphi(A)>0$, $\mathbb{P}_{(i,x)}(\tau_A<\infty)>0 \quad \forall (i,x)\in\{1,2\}\times]0,C[$, où $\tau_A = \inf\{n\geq 1 : (I'_n,Y_n)\in A\}$.*

Si $\{(I'_n,Y_n)\}$ est φ-irréductible, on lui associe une mesure d'irréductibilité maximale :

$$\psi = \sum_{n=0}^\infty \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\varphi G^n.$$

La φ-irréductibilité entraîne la ψ-irréductibilité. Cette mesure permet alors de définir l'ensemble suivant : $\mathcal{A}^+ = \{A\in\mathcal{A} : \psi(A)>0\}$.

Définition 2 (Chaîne récurrente) *$\{(I'_n,Y_n)\}$ est dite récurrente si elle est ψ-irréductible, et*

$$\sum_{n=1}^\infty G^n(i,x,A) = \infty \quad \forall (i,x)\in\{1,2\}\times]0,C[\quad \forall A\in\mathcal{A}^+. \tag{1}$$

Définition 3 (ensemble petit(processus à temps discret)) *Un ensemble $J\times D\in\mathcal{A}$ est appelé ν_a-petit s'il existe une mesure ν_a non triviale sur $(\{1,2\}\times]0,C[,\mathcal{A})$ telle que*

$$\forall (i,x)\in J\times D,\quad \forall (j,B)\in\mathcal{A} \quad \sum_{n=1}^\infty a(n)G^n(i,x,j,B)\geq \nu_a(j,B), \tag{2}$$

où la suite positive $\{a(n)\}$ satisfait $\sum_{n=0}^\infty a(n) = 1$.

Condition $(\mathcal{D})$. Pour un certain ensemble $J\times D\in\mathcal{A}$, une certaine constante $b<\infty$, et une fonction $V:\{1,2\}\times]0,C[\to[0,\infty]$, on a

$$\forall (i,x)\in\{1,2\}\times]0,C[\qquad GV(i,x)-V(i,x)\leq -L(i,x,\{1,2\},]0,C[)+b\mathbf{1}_{J\times D}(i,x),$$

Théorème 3 (corollaire 4.5 [Costa 99]) *Supposons que $\{(I'_n,Y_n)\}$ est récurrente et que la condition $(\mathcal{D})$ est satisfaite pour une fonction V bornée sur un ensemble petit $J\times D\in\mathcal{A}^+$. Alors, il existe une unique probabilité invariante pour le PDMP $(I_t,X_t)_{t\geq 0}$.*

3.2 - Application

Afin d'appliquer ce théorème, nous allons donner le schéma de démonstration de :
– la récurrence de la chaîne $(I'_n,Y_n)_n$ de noyau markovien G,
– l'ensemble $\{1,2\}\times]0,C[$ est petit,
– la condition $(\mathcal{D})$ vérifiée sur $\{1,2\}\times]0,C[$.

Tout d'abord, la valeur des noyaux pour l'exemple étudié est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} L(1,x,1,dy) & = & \frac{1}{\omega_1}\mathbf{1}_{[x,C[}(y)\left(\frac{C-y}{C-x}\right)^{\frac{1+\lambda_1}{\omega_1}}\frac{dy}{C-y} \\ L(2,x,2,dy) & = & \frac{1}{\omega_2}\mathbf{1}_{]0,x]}(y)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1+\lambda_2}{\omega_2}}\frac{dy}{y} \\ L(1,x,2,dy) & = & L(2,x,1,dy) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} K(1,x,2,dy) & = & \lambda_1 L(1,x,1,dy) \\ K(2,x,1,dy) & = & \lambda_2 L(2,x,2,dy) \\ K(1,x,1,dy) & = & K(2,x,2,dy) = 0 \end{array}\right.$$

$$G(i,x,j,dy) = L(i,x,i,dy)\mathbf{1}_{j=i} + K(i,x,j,dy)\mathbf{1}_{j\neq i},$$

Pour montrer que l'ensemble est petit, on montre la relation (2) pour $a(2) = 1$ et $a(k) = 0$ pour tout $k \neq 2$:

$$\forall (i,j) \in \{1,2\} \quad \forall x \in]0,C[, \quad G^2(i,x,j,dy) \geq k(C-y)^{\frac{1+\lambda_1}{\omega_1}} y^{\frac{1+\lambda_2}{\omega_2}} dy := \nu(j,dy). \tag{3}$$

La condition $(\mathcal{D})$ est facile à démontrer en prenant la fonction V égale à une constante. La relation (3) permet de montrer que la chaîne est φ-irréductible avec $\varphi = N \otimes \lambda$, où N est la mesure de comptage sur l'ensemble $\{1,2\}$ et λ la mesure de Lebesgue sur $]0,C[$. Dans ce cas, pour tout borélien A de $\mathcal{P}(\{1,2\}) \otimes \mathcal{B}(]0,C[)$,

$$\mathbb{P}_{(i,x)}(\tau_A < \infty) \geq \mathbb{P}_{(i,x)}\big((I'_2, Y_2) \in A\big) = G^2(i,x,A) \geq \nu(A) > 0.$$

La relation (1) est également vérifiable à l'aide de (3) :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} G^n(i,x,j,B) &\geq \sum_{n\geq 2}\sum_{k\in\{1,2\}}\int_0^C G^{n-2}(i,x,k,dy)G^2(k,y,j,B) \\ &\geq \sum_{n\geq 2}\underbrace{\left[\sum_{k\in\{1,2\}}\int_0^C G^{n-2}(i,x,k,dy)\right]}_{=1}\underbrace{\int_B \nu(j,dy)}_{=cte>0} = +\infty \end{aligned}$$

Les hypothèses du théorème 3 sont donc vérifiées. Il existe donc une unique probabilité invariante pour le processus $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$. Pour calculer cette loi, on cherche tout d'abord la loi stationnaire pour la chaîne de noyau G, puis on applique la transformation décrite dans l'article.

3.3 - Synthèse

L'application de ce théorème nécessite de montrer la φ-irréductibilité d'une chaîne de Markov. Si les hypothèses sur les taux sont plus faibles, les calculs sont encore plus compliqués que dans la section précédente, c'est pourquoi il semble difficile d'étendre cette méthode dans un cadre général. De plus, au cours des calculs pour trouver la loi stationnaire de la chaîne de Markov, on s'aperçoit que l'on cherche directement la mesure invariante pour le processus $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$, aussi, il ne semble pas nécessaire de passer par une chaîne (à temps discret). Les parties suivantes exposent deux méthodes qui étudient les propriétés du processus à temps continu sans passer par le temps discret.

4 - Résolution par Asmussen

4.1 - Principe

Nous utilisons ici la notion de Harris récurrence au sens de Asmussen [Asmussen 87]. Plus précisément, nous appliquons le résultat suivant ([Asmussen 87]) :

Théorème 4 *Supposons qu'un processus de Markov $(Y_t)_{t>0}$ à valeurs dans $\{1,2\}\times]0,C[$ et de semi-groupe P_t soit tel qu'il existe une mesure non triviale ν sur $\mathcal{A}$, un ensemble récurrent $R \in \mathcal{A}$ et un intervalle ouvert $O \subset \mathbb{R}^+$ tels que quel que soit $(i,x) \in R$ et quel que soit $t \in O$:*

$$P_t(i,x,j,B) \geq \nu(j,B) \text{ pour tout } (j,B) \in \mathcal{A}. \tag{4}$$

Alors :

- *il existe une mesure stationnaire μ qui est unique à une constante près ;*
- *dans le cas récurrent positif (i.e. $||\mu|| < \infty$), la loi $P_t(y,.)$ de Y_t sachant $Y_0 = y$ converge vers $\pi = \mu/||\mu||$ en variations totales ;*
- *dans le cas récurrent nul, $\mathbb{P}_y(Y_t \in F) \to 0$ quand $t \to +\infty$ pour tout ensemble $F \in \mathcal{A}$ avec $\mu(F) < \infty$.*

Pour appliquer ce théorème, on "choisit" tout d'abord un ensemble récurent R, c'est à dire un ensemble tel que $\mathbb{P}_{(i,x)}(\tau_R < \infty) = 1$ pour tout $(i,x) \in \{1,2\}\times]0,C[$, avec τ_R le temps d'atteinte de R. Ensuite, il s'agit de trouver une mesure ν et un intervalle O qui vérifient (4). On peut, comme nous le faisons dans ce paragraphe, choisir $R = \{1,2\}\times]0,C[$ qui est trivialement récurrent et dans ce cas, l'étape difficile sera de montrer la relation (4). Par contre, si on prend un singleton comme ensemble $R = \{(1,x)\}$, (4) est évident, mais il peut être difficile de montrer que c'est un ensemble récurrent, cette démarche sera étudiée dans le paragraphe 5.

4.2 - Application

Pour appliquer le théorème, nous montrons que l'ensemble récurrent $\{1,2\}\times]0,C[$ vérifie la propriété (4).

$$\begin{aligned} P_t(1,x,1,B) &\geq \mathbb{P}_{(1,x)}(I_t = 1,\ X_t \in B,\ T_2 \leq t < T_3) \\ &= \int_0^t \left[\int_0^{s_2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 s_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 s_2} e^{-\lambda_1 (t-s_2)} \mathbf{1}_{g_1(g_2(g_1(x,s_1),s_2-s_1),t-s_2)\in B} ds_1 \right] ds_2 \end{aligned}$$

On utilise ensuite le fait que la fonction $\psi_{x,s_2} : s_1 \mapsto g_2(g_1(x,s_1), s_2 - s_1)$ est bijective de $[0,s_2]$ dans $[g_2(x,s_2); g_1(x,s_2)]$ et de dérivée bornée par une constante M, pour tout $x \in]0,C[$ et $s_2 \in [0,t]$. Ceci nous permet d'effectuer le changement de variables $y = \psi_{x,s_2}(s_1)$. Par ailleurs, comme $g(1,x,.)$ (respectivement $g(2,x,.)$) converge vers C (resp. 0) uniformément en x, $[g_2(x,s_2); g_1(x,s_2)]$ contient $[\epsilon; C-\epsilon]$ lorsque s_2 est grand, ce qui permet d'éliminer la dépendance en x. On montre ainsi que $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists A > 0 \ \ \forall t \in]2A, 3A[$

$$P_t(1,x,1,B) \geq \tilde{\nu}(B) := \tfrac{\lambda_1 \lambda_2}{M} e^{-3A(2\lambda_1+\lambda_2)} \int_0^A \int_\epsilon^{C-\epsilon} \mathbf{1}_{g_1(y,s)\in B} dy ds.$$

Ensuite, on cherche à minorer $P_{t+1}(i,x,1,B)$ pour tout $(i,x) \in \{1,2\}\times]0,C[$

$$\begin{aligned} P_{t+1}(i,x,1,B) &= \sum_{k\in\{1,2\}} \int_0^C P_1(i,x,k,dy) P_t(k,y,1,B) \\ &\geq \int_0^C P_1(i,x,1,dy) P_t(1,y,1,B) \geq \tilde{\nu}(B) P_1(i,x,1,[0,C]). \end{aligned}$$

Comme les taux sont constants et strictement positifs, $P_1(i,x,1,[0,C]) \geq \min\left(\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}; e^{-\lambda_1}\right)$. On en déduit alors aisément que

$$\forall j \in \{1;2\} \ \ \forall B \in \mathcal{B}(]0;C[) \ \ P_{t+1}(i,x,j,B) \geq \min(\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}; e^{-\lambda_1}) \tilde{\nu}(B) \mathbf{1}_{j=1} := \nu(j,B).$$

L'hypothèse du théorème 4 est vérifiée, donc il existe une loi stationnaire pour le PDMP. Il est possible d'utiliser le générateur infinitésimal du processus markovien $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$ donné dans [Cocozza 03] pour calculer cette loi. On peut alors montrer qu'elle est de masse finie, donc nous sommes dans le cas récurrent positif et le processus converge en variations totales.

4.3 - Synthèse

Le théorème de Asmussen permet d'établir l'existence et l'unicité d'une loi stationnaire sans passer par une chaîne de Markov. De plus, ce procédé donne des informations sur le comportement asymptotique dans le cas d'un processus récurent positif ou nul, ce qui n'était pas le cas dans les méthodes employées précédemment. Malheureusement la méthode que nous avons employée pour utiliser les résultats de Asmussen nécéssite l'injectivité de ψ_{x,s_2} et ne semble guère facile à généraliser.

Une autre façon d'aborder le problème de l'existence et de l'unicité d'une loi stationnaire ainsi que la convergence du processus est de montrer directement que c'est un processus régénératif.

5 - Une autre méthode régénérative

5.1 - Principe

Dans le livre [Cocozza 97] un théorème donne des conditions pour que la loi d'un processus régénératif converge.

Définition 4 *Un processus* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *est* **régénératif** *s'il existe un processus de renouvellement* $(S_n)_{n\geq 0}$ *tel que, pour tout* $n \geq 0$*, le processus* $\big((Y_{S_n+t})_{t\geq 0}, (S_{n+p}-S_n)_{p\geq 1}\big)$
– *soit indépendant de* $S_0, S_1, ..., S_n$*,*
– *ait une loi qui ne dépende pas de* n*.*

Les instants S_n $(n \geq 0)$ sont appelés **instants de régénération**.

Théorème 5 (6.75 [Cocozza 97]) *Soit* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *un processus régénératif (à valeur dans un espace métrique), continu à droite et tel que la loi de la longueur des cycles soit de moyenne* μ *finie et soit non-arithmétique, alors pour toute fonction* f *continue et bornée :*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(f(Y_t)) = \frac{1}{\mu}\mathbb{E}\left(\int_{S_0}^{S_1} f(Y_s)ds\right).$$

C'est-à-dire que le processus converge en loi.

5.2 - Application

Soit $x \in]0, C[$. Nous montrons que le processus $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$ est régénératif, les instants de régénération étant les instants de passage successifs en $(1, x)$.

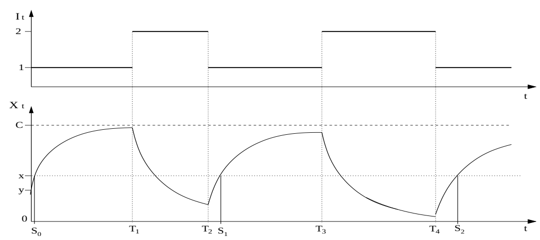

FIG. 2 – Exemple de processus $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$ avec ses instants de régénération

Pour cela, on pose $\tau_{(1,x)} = \inf\big(t \geq T_1,\ I_t = 1,\ X_t = x\big)$. Il s'agit de montrer que pour tout $y \in]0, C[$, $\mathbb{P}_{(1,y)}(\tau_{(1,x)} < \infty) = 1$ et que $\mathbb{E}_{(1,x)}(\tau_{(1,x)}) < \infty$. Notons pour $k \geq 1$, $U_k := T_k - T_{k-1}$ les périodes passées dans chaque état. Sachant que $I_0 = 1$ et que I_t change d'état (1 ou 2) à chaque saut, on a clairement $\{\tau_{(1,x)} < \infty\} = \bigcup_n \underbrace{\{\exists t \in [T_{2n}, T_{2n+1}[;\ X_t = x\}}_{:=A_n}$.
Comme $g(1, z, .)$ est croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[z, C[$, pour qu'il existe $s > 0$ tel que $g_1(X_{T_{2n}}, s) = x$, il faut que $X_{T_{2n}}$ soit plus petit que x. De plus, pour "passer" par x avant le prochain saut, U_{2n+1} doit être assez grand. Ainsi, $A_n = \{X_{T_{2n}} \leq x\} \cap \{U_{2n+1} \geq \psi_1(X_{T_{2n}}, x)\}$, où $\psi_i(y, x)$ correspond au temps nécessaire pour aller de y à x en suivant la fonction $g(i, y, .)$, c'est à dire $g(i, y, \psi_i(y, x)) = x$. Comme $\psi_1(., x)$ est décroissante sur $[0, x]$, si $U_{2n+1} \geq \psi_1(0, x)$, alors $U_{2n+1} \geq \psi_1(X_{T_{2n}}, x)$. Par ailleurs, $g(2, x, s)$ étant croissante en x et décroissante en s, si $U_{2n} \geq \psi_2(C, x)$, alors
$X_{T_{2n}} = g(2, X_{T_{2n-1}}, U_{2n}) \leq g(2, C, \psi_2(C, x)) = x$. On a par conséquent
$B_n := \{U_{2n+1} \geq \psi_1(0, x)\} \cap \{U_{2n} \geq \psi_2(C, x)\} \subset A_n$.
La suite $(B_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'événements indépendants telle que
$\mathbb{P}_{(i,y)}(B_n) = e^{-\lambda_1\psi_1(0,x)}e^{-\lambda_2\psi_2(C,x)}$, donc $\sum_n \mathbb{P}_{(i,y)}(B_n) = \infty$. Par le lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\bigcup_n B_n) = 1$, ce qui implique que $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_{(1,y)}(\tau_{(1,x)} < \infty) = 1$. On calcule de la même façon $\mathbb{E}_{(1,y)}(\tau_{(1,x)})$ et on montre que $\mathbb{E}_{(1,y)}(\tau_{(1,x)}) < \infty$. Les hypothèses du théorème 5 sont bien vérifiées, donc il existe une mesure stationnaire unique à une constante près et le processus $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$ converge en loi. Comme dans la troisième méthode, il est possible de calculer ensuite la loi invariante à l'aide du générateur infinitésimal de $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$.

5.3 - Synthèse

Les calculs effectués ici sont beaucoup plus simples qu'avec les autres méthodes. De plus, nous obtenons la convergence en loi vers la loi stationnaire. Cependant, la démonstration devra être adaptée en dimension supérieure ou égale à 2 puisqu'ici elle repose fortement sur le théorème des valeurs intermédiaires en dimension 1. Celui-ci nous permet d'affirmer que toutes les valeurs entre $X_{T_{2n}}$ et $X_{T_{2n+1}} = g(I_{T_{2n}}, X_{T_{2n}}, T_{2n+1} - T_{2n})$ sont atteintes par le processus X_t pour $t \in [T_{2n}, T_{2n+1}]$.

6 - Conclusion

Cet article a permis de traiter entièrement le comportement asymptotique d'un processus bien particulier de fiabilité dynamique : existence et unicité d'une loi invariante et convergence en loi du processus. Les deux premières approches étudiées utilisant des chaînes de Markov ne semblent pas très adaptées à la généralisation et n'abordent pas la convergence. Il semble donc préférable d'utiliser une méthode travaillant sur le processus à temps continu. En ce qui concerne les techniques de régénération, elles semblent plus adaptées à la généralisation. D'autre part elles devraient permettre d'évaluer par simulation la loi asymptotique (et par voie de conséquence toutes les quantités liées à cette loi, comme par exemple la disponibilité asymptotique ou le MUT) grâce au théorème 5 ou des résultats similaires pour des processus Harris récurrents. Les travaux effectués à la suite de cet article auront pour but de traiter la convergence de processus de fiabilité dynamique dans un cadre plus général en utilisant des techniques de régénération.

Références

[Asmussen 87] Asmussen S. *Applied probability and queues.* John Wiley & Sons, 1987.

[Cocozza 97] Cocozza C. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes.* Springer, 1997.

[Cocozza 03] Cocozza-Thivent C, Eymard R, Mercier S, Roussignol M. *On the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability.* Prépublication du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques appliquées, Université de Marne-la-Vallée, 2003.

[Costa 90] Costa OLV. *Stationary distributions for piecewise-deterministic Markov processes.* Applied Probability, vol. 27, p60-73. 1990.

[Costa 99] Costa OLV, Dufour F. *Stability of Piecewise-Deterministic Markov Processes.* Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 37(5), p1483-1502. 1999.

[Davis 93] Davis MHA. *Markov Models and Optimization.* Chapman & Hall, 1993.

[Duflo 90] Duflo M. *Méthodes récursives aléatoires.* Masson, 1990.