

Document de synthèse présenté en vue de l'obtention de

Habilitation à Diriger des Recherches
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Modèles stochastiques et méthodes numériques pour la fiabilité

Sophie MERCIER



Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées

soutenue le 21 Novembre 2008 devant le jury composé de :

Rapporteurs

François DUFOUR

Professeur des Universités à l'Université Bordeaux 1

Marius IOSIFESCU

Vice-président de l'Académie Roumaine & Directeur de l'Institut
of Mathematical Statistics and Applied Mathematics (IMSAM)

Rafael PÉREZ-OCÓN

Professeur des Universités à l'Universidad de Granada

Examineurs

Christiane COCOZZA-THIVENT

Professeur des Universités à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Fabrice GAMBOA

Professeur des Universités à l'Université Paul Sabatier (Toulouse III)

Damien LAMBERTON

Professeur des Universités à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Michel ROUSSIGNOL

Professeur des Universités à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée

A Alain et Noémie

Remerciements

C'est avec beaucoup de plaisir que je profite de l'occasion qui m'est offerte ici de remercier un certain nombre de personnes qui ont contribué à mon travail de recherche et m'ont ainsi permis d'aboutir à l'élaboration et à la soutenance de ce mémoire.

En tout premier lieu, je souhaite remercier le Professeur Michel Roussignol, qui m'a fait confiance en acceptant de diriger ma thèse il y a de cela une dizaine d'années et avec qui je prend toujours autant de plaisir à travailler. Que ce soit dans un groupe de travail ou dans un coin de couloir, les discussions scientifiques avec lui m'ont toujours énormément apporté et ont clairement contribué aussi bien à ma formation qu'à ma production scientifique.

En second lieu, j'exprime aussi ma profonde gratitude au Professeur Christiane Cocozza-Thivent, d'une part pour son accueil amical lorsque je suis arrivée au Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées en début de thèse, d'autre part pour la confiance qu'elle m'a témoignée tout au long de ces années, qui a abouti au co-encadrement de la thèse de Margot Desgrouas et m'a ainsi permis de m'initier à l'encadrement scientifique.

Je souhaite par ailleurs remercier le Professeur Robert Eymard, qui, par son enthousiasme communicatif, a su m'initier à un domaine pour moi jusqu'alors totalement inconnu, je veux parler des méthodes de volumes finis. Ceci m'a clairement permis d'enrichir ma culture scientifique et je l'en remercie de tout coeur.

J'exprime aussi toute ma gratitude à mes autres co-auteurs, à savoir Pierre-Étienne Labeau et Alain Prignet, pour leur collaboration amicale et fructueuse.

Enfin, je remercie profondément les Professeurs François Dufour, Marius Iosifescu et Raphael Pérez-Ocón pour avoir examiné ce mémoire et rapporté dessus. J'exprime aussi ma sincère gratitude aux Professeurs Fabrice Gamboa et Damien Lambertson d'avoir accepté de participer au jury de soutenance de ce mémoire, ainsi qu'à tous les autres membres de ce jury que j'ai déjà nommés, à savoir les Professeurs Christiane Cocozza-Thivent, François Dufour, Marius Iosifescu, Raphael Pérez-Ocón et Michel Roussignol.

Table des matières

Notations	1
1 Introduction	5
1.1 Version française	5
1.2 English version	17
2 Optimisation de politiques de maintenance	29
2.1 Introduction	29
2.2 Thèse	30
2.3 Poursuite du travail de thèse	33
2.4 Conclusion - Perspectives	36
3 Remplacement préventif de composants obsolètes	39
3.1 Introduction	39
3.2 Le modèle	40
3.3 Cas de taux de panne constants	41
3.4 Cas de taux de panne non constants	43
3.5 Conclusion - Perspectives	46
4 Encadrement de quantités fiabilistes	49
4.1 Introduction	49
4.2 Principe d'encadrement et premières applications	50
4.3 Cas semi-markovien	53
4.4 Cas markovien	59
4.5 Conclusion - Perspectives	64
5 Méthodes de volumes finis en fiabilité dynamique	67
5.1 Introduction	67
5.2 Le cadre d'étude	68
5.3 Caractérisation des lois marginales	71
5.4 Schéma de volumes finis explicite	75
5.5 Schéma de volumes finis implicite	82
5.6 Conclusion - Perspectives	92

6	Autres travaux en fiabilité dynamique	95
6.1	Introduction	95
6.2	Un cas d'étude	96
6.3	Facteurs d'importance (travail soumis)	100
6.4	Thèse de Margot Desgrouas	107
6.5	Conclusion - Perspectives	108
7	Conclusion, Travaux en cours, Projets	111
7.1	Conclusion	111
7.2	Processus Gamma bivariés	111
7.3	Co-encadrement d'une thèse CIFRE	114
7.4	Projet de livre	116
7.5	Projet ANR	116
	Liste des travaux	119
	Bibliographie	125

Notations

Nous présentons ici quelques notations et abréviations que nous utilisons tout au long de ce document. Certaines abréviations anglaises d'usage courant même en français ont été conservées telles quelles, sans être traduites en langue française (ex : i.i.d.).

Abréviations

- BV : Bounded Variation (variation bornée).
- e.d.o. : équation différentielle ordinaire.
- e.d.p. : équation différentielle partielle.
- ERM : équation de renouvellement markovien.
- hr : Hazard Rate (taux de hasard).
- IFR : Increasing Failure Rate (taux de panne croissant).
- i.i.d. : independent and identically distributed (indépendantes et de même loi).
- NBU : New Better Than Used (meilleur neuf qu'usagé).
- PDMP : Piecewise Deterministic Markov Process (processus de Markov déterministe par morceaux).
- p.s. : presque sûrement.
- resp. : respectivement.
- rhr : Reversed Hazard Rate (taux de hasard inversé).
- SMP : Semi-Markov Process (processus semi-markovien).
- v.a.r. : variable aléatoire réelle.

Notations générales

- Pour $f : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ bornée (où $d \in \mathbb{N}^*$), on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$.
- Soient F et G deux espaces topologiques quelconques. Alors :
 - $C(F, G)$ est l'ensemble des fonctions continues définies sur F et à valeurs dans G .
 - $C_b(F, G)$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $C(F, G)$ et bornées.
 - $C^1(F, G)$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $C(F, G)$, différentiables et de différentielles continues sur F .
 - $C_c^1(F, G)$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $C^1(F, G)$ et à support compact.
- Pour $A \subset E$, $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A , définie sur E par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \in E \setminus A$.
- Si M est une matrice de taille $n_1 \times n_2$, pour $1 \leq i \leq n_1$ et $1 \leq j \leq n_2$, $M(i, \cdot)$ représente la i -ième ligne et $M(\cdot, j)$ la j -ième colonne.
- Pour $f : E \times F \rightarrow G$ et $x \in E$, le symbole $f(x, \cdot)$ représente l'application $f(x, \cdot) : F \rightarrow G$ qui à $y \in F$ associe $f(x, y)$. Pour $y \in F$, le symbole $f(\cdot, y)$ est défini de la même manière.

Notations probabilistes

- Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, \mathbb{E} représente l'espérance par rapport à \mathbb{P} .
- Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesuré (E, \mathcal{E}) , pour $x \in E$, le symbole \mathbb{P}_x représente la probabilité conditionnelle sachant que le processus part de $X_0 = x$ et \mathbb{E}_x représente l'espérance par rapport à \mathbb{P}_x . De même, si ρ_0 est une probabilité sur (E, \mathcal{E}) , \mathbb{P}_{ρ_0} et \mathbb{E}_{ρ_0} désignent la probabilité et l'espérance conditionnelles sachant que X_0 a pour loi ρ_0 .
- Si $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une v.a.r., on note F_X sa fonction de répartition et \bar{F}_X sa fonction de survie, avec :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

pour tout x réel.

- Lois de probabilités :

- $Exp(\lambda)$: loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- $\Gamma(\alpha, \beta)$: loi Gamma de paramètres de forme α et d'échelle β , où $\alpha, \beta > 0$. La densité associée est

$$g_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- $LN(m, \sigma)$: loi log-normale de paramètres m et σ , où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. La densité associée est

$$l_{m, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2\sigma^2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

- $W(\alpha, \beta)$: loi de Weibull de paramètres d'échelle α et de forme β , où $\alpha, \beta > 0$. La fonction de survie associée est

$$\bar{F}_{\alpha, \beta}(x) = e^{-\alpha x^\beta} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Chapitre 1

Introduction

1.1 Version française

Le contexte

L'objectif de ce document est de présenter l'essentiel de mon travail de recherche, qui propose quelques contributions dans le domaine des mathématiques pour la fiabilité. Rappelons que depuis les ouvrages fondateurs de (Barlow et Proschan, 1965, 1975), ce domaine désigne l'étude du fonctionnement de ce que l'on appelle un système, un système pouvant représenter à peu près n'importe quel machine ou appareil susceptible d'être en marche ou en panne à un instant donné. Pour ce type d'étude, deux approches sont possibles, que l'on peut qualifier respectivement de statique et de dynamique : l'une s'intéresse aux propriétés d'un système à un instant t donné avec, par exemple, l'étude des fonctions de structure, des réseaux bayésiens, des arbres de défaillances... L'autre envisage au contraire son évolution au cours du temps. C'est à ce dernier aspect qu'est consacré tout ce mémoire, et plus précisément à l'étude de systèmes dont l'évolution dans le temps est aléatoire et modélisée par un processus stochastique. Ce type d'étude présente deux volets : un volet statistique, dont le but est de déterminer un modèle stochastique qui soit le mieux ajusté possible aux données (et éventuellement aux avis d'experts), et un volet probabiliste qui, partant d'un modèle stochastique donné, vise à analyser le comportement aléatoire du système et à faire de la prévision. Nous laissons pour notre part tout aspect statistique de côté pour nous consacrer à une approche essentiellement probabiliste.

Si l'on se place d'un point de vue industriel, les pannes aléatoires d'un système peuvent avoir diverses incidences, les unes du domaine économique, du fait de coûts de réparation ou d'indisponibilité, les autres du domaine de la sûreté de fonctionnement, lorsqu'il s'agit de composants critiques pour l'environnement ou la santé humaine par exemple. Ceci induit des contraintes, qui imposent à un industriel de contrôler le bon fonctionnement du système

qu'il exploite. Ces contraintes s'expriment à l'aide d'indicateurs, qui permettent de mesurer les performances d'un système, de contrôler sa qualité, sa fiabilité, son coût de fonctionnement... Ceci induit un premier problème, qui est le calcul de ces indicateurs, pour lesquels on ne dispose pas nécessairement de formules analytiques exactes, ou dont la forme exacte pose des problèmes d'évaluation numérique. Un deuxième problème est aussi de voir comment agir pour améliorer ces indicateurs, afin de gagner en sécurité ou en profit. L'essentiel de ce document se situe dans la lignée de ces deux problèmes : les deux premiers chapitres (Chapitres 2 et 3) sont consacrés à l'étude de politiques de maintenance, qui, en prévenant certaines pannes, permettent d'améliorer certains indicateurs ; les chapitres suivants (Chapitres 4, 5 et 6) sont principalement consacrés à l'évaluation numérique de ces indicateurs, et ce, pour divers modèles d'évolution stochastique ; une partie du Chapitre 6 présente aussi une étude de sensibilité, qui permet de classer les différents paramètres d'un système selon leur importance, c'est-à-dire selon leur influence sur un indicateur donné. Le dernier chapitre (Chapitre 7) présente quant à lui des travaux en cours, ainsi que quelques projets, dont certains sont d'une essence différente.

Chapitre 2. Optimisation de politiques de maintenance

Ce chapitre est consacré à une présentation rapide de mes travaux de thèse (1997-2000), ainsi qu'à un prolongement de ces travaux effectué ultérieurement, en collaboration avec mon directeur de thèse, Michel Roussignol (UPEMLV). L'objet de cette thèse est de proposer, étudier et optimiser différentes politiques de maintenance préventives ou correctives, pour des systèmes se dégradant suivant des processus markoviens ou semi-markoviens, à valeurs dans un espace d'états fini. Les durées de réparation suivent des lois quelconques et les niveaux de maintenance corrective ou préventive peuvent être ajustés. Les critères d'optimisation utilisés sont la disponibilité et le coût moyen par unité de temps asymptotiques. Les processus décrivant l'évolution des systèmes, qu'il soient soumis à maintenance préventive ou non, sont semi-régénératifs, et le calcul des critères d'optimisation reposent sur la théorie du renouvellement markovien. Dans ce cadre, trois études différentes ont été menées :

Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à optimiser le niveau de maintenance corrective d'un système à dégradation markovienne, relativement à la disponibilité asymptotique. Ceci nous a amené à mettre une hypothèse de vieillissement sur le système, que nous avons traduite par une monotonie du processus de Markov sous-jacent, relativement à un ordre encore assez peu utilisé en fiabilité, à savoir l'ordre pour le taux de hasard inversé. Lorsque le degré de réparation est mesuré à l'aide de ce même ordre, nous avons montré dans [P2] que la disponibilité asymptotique est d'autant meilleure que les réparations sont complètes. Contrairement à ce à quoi on

aurait sans doute pu s'attendre, l'ordre stochastique usuel n'est en revanche pas suffisant pour avoir ce type de résultat. Divers exemples d'optimisation du niveau de maintenance corrective relativement à la disponibilité asymptotique sont par ailleurs donnés dans [P3].

Dans un deuxième temps, nous avons proposé une politique de maintenance préventive pour ce même système (à dégradation markovienne). L'état du système est observé au travers d'inspections instantanées parfaites. La politique de maintenance étudiée est de type dynamique, c'est-à-dire liée à l'évolution du système : lors d'une inspection, si le système n'est pas trop dégradé, on se contente de choisir la date (aléatoire) de la prochaine inspection en fonction de son état courant ; s'il est très dégradé, on l'arrête pour lui faire subir une opération de maintenance préventive. Pour cette politique, nous avons montré dans [P4] que, sous certaines conditions, le plan d'inspections optimal était déterministe. Nous avons par ailleurs étudié l'apport de la politique de maintenance préventive pour les critères étudiés et déterminé les plans d'inspections optimaux. Ceci nous a permis de vérifier que, comme l'on pouvait s'y attendre, les inspections séquentielles proposées ici sont effectivement plus efficaces que des inspections périodiques, pourtant fréquemment utilisées.

Dans un troisième temps, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une politique de maintenance suivant l'âge (Barlow et Proschan, 1965) pour un système semi-markovien, cf [P1]. Là encore nous avons montré que, sous certaines conditions, la politique optimale correspond à un temps d'attente de la maintenance de type déterministe. Nous avons aussi donné différentes conditions pour que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique, selon le comportement du taux de panne après un redémarrage (croissant, décroissant, décroissant puis croissant, ...).

Le travail fait ultérieurement avec Michel Roussignol [P5] est consacré à un système à dégradation markovienne, soumis à la même politique de maintenance dynamique que celle étudiée lors de la thèse. Les critères d'intérêt sont la fiabilité et le taux de défaillance asymptotique, c'est-à-dire des critères liés à la première durée de bon fonctionnement du système. Ces critères sont donc d'une essence très différente de ceux étudiés dans la thèse. Notons par ailleurs que, malgré un intérêt applicatif certain, le taux de défaillance asymptotique n'a cependant été que peu étudié dans la littérature consacrée à la maintenance, ce qui est sans doute dû au fait qu'il est souvent plus difficile à déterminer que les autres critères. Pour notre étude, nous commençons par établir des équations de renouvellement markovien vérifiées par la fiabilité du système maintenu. Ces équations sont défectives, au sens où le noyau sous-jacent est de masse strictement inférieure à 1. En le renormalisant, on se ramène à de vraies équations de renouvellement markovien, qui nous permettent d'obtenir un équivalent de la fiabilité de la forme $R(t) \sim C \times e^{-\beta_0 t}$ quand t tend vers $+\infty$, où β_0 est calculable numériquement. On montre en-

suite que β_0 est le taux de défaillance asymptotique. Enfin, nous donnons des conditions portant sur la maintenance pour que la politique de maintenance améliore à la fois la fiabilité et le taux de défaillance asymptotique.

Chapitre 3. Remplacement préventif de composants obsolètes

Ce chapitre est lui aussi consacré à l'étude de politiques de maintenance préventive, mais dans un contexte différent. Une première partie de ces travaux a été effectuée en collaboration avec Pierre-Etienne Labeau (Université Libre de Bruxelles), la deuxième partie seule. Le contexte est le suivant : nous considérons des composants identiques et indépendants, qui sont remplacés instantanément lorsqu'ils tombent en panne. Contrairement au cadre usuel de ce type d'étude, où les composants de rechange sont généralement supposés être des copies conformes de ceux qu'ils remplacent tout-au-long de la période d'intérêt, nous envisageons ici une innovation technologique qui permet de disposer, à partir d'un certain moment, de nouveaux composants, plus fiables et plus économiques. Tous les composants mis en place ultérieurement à cette innovation sont supposés être issus de cette nouvelle technologie. Le problème est alors de déterminer la meilleure stratégie de remplacements des anciens composants par des nouveaux : est-il préférable de remplacer les anciens dès l'apparition des nouveaux composants (stratégie purement préventive) ou d'introduire les nouveaux progressivement, au fur et à mesure que les anciens tombent en panne (stratégie purement corrective) ? Des stratégies mixtes, associant des remplacements préventifs et correctifs, peuvent-elles encore être meilleures ? Le critère d'optimisation utilisé est une fonction de coût sur un horizon de temps fini, qui inclut des dépendances économiques entre les remplacements.

Lorsque les composants ont des taux de panne constants, nous avons démontré avec Pierre-Etienne Labeau [P6] que les seules stratégies optimales possibles étaient purement correctives, purement préventives, ou encore presque purement préventives (remplacement préventif de tous les composants dès la première panne d'un ancien composant). Des conditions précises portant sur les paramètres des différents types de composants ainsi que sur la durée de mission prévue permettent de déterminer la stratégie optimale. Les outils principaux sont la théorie des processus de Poisson et les statistiques d'ordre associées à des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle.

Dans [P14], je me suis ensuite intéressée au cas où les composants ont des taux de panne quelconques (composants présentant des phénomènes de vieillissement). Dans ce cas, on peut observer numériquement que la stratégie optimale à horizon fini évolue de façon non régulière en fonction des paramètres des composants. D'un point de vue théorique, les fonctions de

coût faisant intervenir des fonctions de renouvellement non connues explicitement et des statistiques d'ordre associées à des variables aléatoires pas nécessairement identiquement distribuées, il semble illusoire d'espérer obtenir des conditions précises permettant de spécifier la stratégie optimale de remplacement à horizon fini dans ce cadre. On obtient en revanche des conditions précises portant sur les lois des durées de vie des composants et sur leurs autres paramètres, permettant de spécifier la stratégie optimale sur un horizon infini. On montre ainsi que, contrairement au cas de taux constants, et sans doute aussi, contrairement à l'intuition, n'importe quelle stratégie peut ici être optimale sur un horizon infini. Des optimisations menées numériquement montrent par ailleurs qu'il en est de même pour un horizon fini, même proche. On observe aussi numériquement que les résultats théoriques à horizon infini semblent être un bon indicateur de la stratégie à suivre sur un horizon fini.

Chapitre 4. Encadrement de quantités fiabilistes

Dans ce chapitre, nous abordons la partie "évaluation numérique d'indicateurs" de ce mémoire. Contrairement au chapitre suivant qui propose des méthodes du domaine de l'analyse numérique, celles utilisées dans ce chapitre restent du domaine des probabilités.

Nous nous intéressons ici à diverses quantités fiabilistes, dont l'évaluation numérique est traditionnellement faite, au moins dans un contexte industriel, à l'aide d'approximations. En pratique, la précision de ces approximations n'est pas toujours contrôlée, soit parce qu'elle est inconnue d'un point de vue théorique, soit parce que son évaluation est trop coûteuse en temps de calcul et/ou de développement logiciel. Nous proposons ici des encadrements de ces quantités fiabilistes par des bornes simples et aisément calculables, et dont la précision peut être ajustée en fonction d'un pas de temps $h > 0$. Dans chaque cas, la convergence des bornes vers les quantités visées lorsque h tend vers 0 est démontrée. Des algorithmes de calculs des bornes sont fournis.

Le principe de base de ces encadrements est très simple et consiste à encadrer une variable aléatoire (v.a.r.) de loi quelconque par deux v.a.r. discrètes approximantes à valeurs dans $h\mathbb{Z}$. Si le principe d'approximation d'une v.a.r. quelconque par une v.a.r. discrète n'est certes pas nouveau, il n'en demeure pas moins que l'encadrement que nous utilisons ici n'a apparemment été que peu exploré dans la littérature. Comme nous allons le voir plus loin, il permet cependant d'encadrer de très nombreuses quantités fiabilistes, et ce, pour des modélisations très diverses.

Dans [P9], nous commençons par remarquer que, partant de l'encadrement d'une v.a.r. quelconque par deux v.a.r. à valeurs dans $h\mathbb{Z}$, il est immédiat d'en déduire des encadrements de sommes de v.a.r. indépendantes quelconques à l'aide de sommes de v.a.r. discrètes, toutes à valeurs dans le

même espace $h\mathbb{Z}$. On en déduit des encadrements pour diverses quantités fiabilistes liées à des sommes de v.a.r. indépendantes, comme la fiabilité d'un système formé de composants en redondance passive, des fonctions de renouvellement ou des fonctions de survie associée à des sommes géométriques de v.a.r.. Les bornes obtenues sont du même type mais ne font plus intervenir que des v.a.r. à valeurs dans $h\mathbb{N}$. Leur calcul est aisé et facilement implémentable. Notons que les quantités d'intérêt ici, et en particulier les fonctions de renouvellement, ont fait l'objet de très nombreuses publications consacrées à leur évaluation numérique. On peut ainsi se référer à (Dohi *et al.*, 2002), qui comprend un grand nombre de références, les unes spécifiques, consacrées à un type de loi donnée, les autres générales. Un travail de comparaison avec ces dernières a été fait, qui montre l'intérêt de la méthode proposée ici, pour laquelle la précision des résultats est connue directement alors que celle des autres méthodes, même lorsqu'elle est accessible, semble souvent plus difficile à évaluer.

Partant d'un processus semi-markovien (SMP) à temps continu, le même principe d'encadrement est utilisé dans [P11] pour construire deux SMP à temps discret qui encadrent le SMP initial. Les états visités par ces deux SMP discrets sont les mêmes que pour le SMP initial. Les intervalles inter-arrivées des deux SMP discrets encadrent les intervalles inter-arrivées du SMP initial. (L'un reste un peu plus longtemps dans chaque état visité; l'autre un peu moins longtemps). Comme précédemment, les lois des v.a.r. encadrantes, ici les intervalles inter-arrivées des deux SMP discrets, ont pour support $h\mathbb{N}$. Une fois ces deux SMP discrets encadrants construits, nous montrons que la solution d'une équation de renouvellement markovien (ERM) associée au SMP initial peut être encadrée à l'aide de solutions d'ERM associées aux deux SMP discrets. Ces ERM discrètes sont faciles à résoudre et fournissent des bornes simples pour les solutions des ERM continues. L'intérêt applicatif de ce travail est que la plupart des quantités fiabilistes à temps fini liées à un système semi-markovien sont solutions d'ERM continues que l'on ne sait pas résoudre explicitement. La méthode proposée ici fournit des approximations de ces quantités avec une précision connue et ajustable (à l'aide de h), ce qui ne semble pas toujours être le cas des autres méthodes, cf (Csenki, 2002) et ses références par exemple.

Nous terminons ce chapitre en nous consacrant à des systèmes markoviens ([P12]). L'intérêt de cette modélisation, très utilisée par les industriels, est que la plupart des indicateurs sont, dans ce cadre, connus de façon explicite. En ce qui concerne les indicateurs à temps fini, leur formulation fait cependant intervenir des exponentielles de matrice, difficiles à évaluer pour de gros systèmes. Ceci a donné lieu à de très nombreuses publications consacrées à leur évaluation numérique, cf (Moler et Van Loan, 1978, 2003) et leurs références par exemple. Nous particularisons ici les résultats obtenus précédemment dans un cadre semi-markovien au cadre markovien. Les bornes

obtenues se simplifient considérablement. Pour les probabilités de transition, ces bornes fournissent des approximations que l'on peut facilement interpréter en termes du processus de Markov sous-jacent. Ces approximations s'avèrent être proches de méthodes classiques (méthode d'Euler explicite et uniformisation externe) ainsi que de (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004a). Nous avons alors comparé les résultats obtenus par ces différentes méthodes, et ce généralement à l'avantage de la méthode proposée ici, aussi bien pour la qualité des résultats que pour les temps de calculs observés.

Chapitre 5. Méthodes de volumes finis en fiabilité dynamique

Dans ce chapitre, nous continuons à nous intéresser à l'évaluation numérique d'indicateurs fiabilistes mais dans un domaine différent, celui de la fiabilité dynamique. Les travaux présentés ici sont tous en collaboration avec Robert Eymard (UPEMLV), avec en plus Christiane Cocozza-Thivent (UPEMLV) pour [P7] et [P8], Michel Roussignol pour [P7], et Alain Prignet (UPEMLV) pour [P13].

La fiabilité dynamique, introduite par (Devooght, 1997), est l'étude de ce que l'on appelle des systèmes hybrides, c'est-à-dire des systèmes dont l'évolution est gouvernée par deux types de dynamiques : l'une est discrète, liée à l'arrivée d'événements isolés, comme la panne d'un composant ou l'ouverture d'une vanne ; l'autre est continue, à valeurs dans \mathbb{R}^d , liée à l'évolution de variables continues, du type température, pression, durée passée dans un état... Ces deux dynamiques sont en mutuelle interaction, ce qui en complexifie notablement l'étude. On modélise leur évolution à l'aide de processus markoviens déterministes par morceaux (PDMP), introduits et étudiés par (Davis, 1984, 1993). Un PDMP est un processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans un espace d'état $E \times \mathbb{R}^d$ (E est fini), qui saute à des instants isolés. Entre deux sauts, I_t est fixé et X_t suit une trajectoire déterministe qui dépend de I_t . Le taux de transition de I_{t-} à I_t est une fonction $a(I_{t-}, I_t, X_{t-})$. Lors d'un saut de I_t à l'instant t , la variable "continue" X_t peut aussi sauter et est distribuée selon une loi $\mu_{(I_{t-}, I_t, X_{t-})}(dy)$. La modélisation de Davis comprend en plus des sauts éventuels du processus lorsqu'il atteint la frontière de l'espace où il est défini, ce que nous n'envisageons pas ici.

Pour un système hybride modélisé par un PDMP, les indicateurs fiabilistes ne sont généralement pas atteignables analytiquement et sont la plupart du temps évalués par simulation de Monte-Carlo, ce qui induit fréquemment de longs temps de calculs. Nous proposons ici des méthodes alternatives issues de l'analyse numérique, de type volumes finis. Ce type de méthode n'a, à notre connaissance, pas été utilisée auparavant en fiabilité. Les indicateurs fiabilistes (à temps fini) s'exprimant à l'aide des lois marginales du PDMP (les lois à t fixé), nous nous attachons plus spécifiquement à leur évaluation. Pour ce faire, nous commençons par les caractériser comme

unique solution d'un système d'équations intégro-différentielles [P7]. Puis, partant de ces équations, nous proposons deux schémas de type volumes finis dont nous démontrons la convergence, l'un explicite [P8], l'autre implicite [P13].

Un PDMP étant un processus markovien, nous pouvons écrire les équations de Chapman-Kolmogorov associées (aussi appelées équations de Dynkin). Ces équations stipulent que la loi marginale $\rho_t = (\rho_t(i, dx))_{i \in E}$ du processus à l'instant t , vérifie

$$\rho_t h = \rho_{\text{ini}} h + \int_0^t \rho_s H_0 h \, ds \quad (1.1)$$

pour tout $t \geq 0$ et $h : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, où H_0 est le générateur étendu du processus et ρ_{ini} la loi initiale du PDMP. Ces équations sont données dans (Davis, 1993), ainsi que le générateur H_0 . Le but de [P7] est de montrer que $(\rho_t)_{t \geq 0}$ est l'unique famille de probabilités solution de ces équations. Pour cela, nous étendons classiquement (1.1) à des fonctions dépendant du temps et montrons que

$$0 = (\rho_{\text{ini}} \varphi)(\cdot, \cdot, 0) + \int_{\mathbb{R}_+} \rho_s H \varphi(\cdot, \cdot, s) \, ds \quad (1.2)$$

pour toute $\varphi : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ régulière à support compact, où

$$H \varphi(\cdot, \cdot, s) = H_0(\varphi(\cdot, \cdot, s)) + \frac{\partial}{\partial s} \varphi(\cdot, \cdot, s). \quad (1.3)$$

Il s'agit alors de montrer que $\rho_s(i, dx) \times ds$ est l'unique mesure de Radon vérifiant ces nouvelles équations, ce qui permet de conclure sur le problème initial grâce à un argument de continuité. Pour cela, si $\tilde{m}(i, dx, ds)$ désigne la différence de deux solutions de (1.2), on remarque que $\tilde{m} \psi = 0$ pour toute fonction ψ de la forme $\psi(\cdot, \cdot, s) = H \varphi(\cdot, \cdot, s)$. En utilisant des transformées des fonctions φ le long des trajectoires du processus et un théorème de Cauchy-Lipschitz fonctionnel, on montre ensuite que cette propriété est vraie pour suffisamment de fonctions ψ pour pouvoir en déduire que \tilde{m} est nulle et ainsi conclure sur notre problème d'unicité.

Dans le cas où ρ_{ini} et $\mu_{(i,j,x)}(dy)$ sont des mesures à densité, la loi marginale du PDMP ρ_t est aussi une mesure à densité, $\rho_t(i, dx) = u(i, x, t) \, dx$. Les équations de Chapman-Kolmogorov peuvent alors s'écrire sous la forme suivante (au moins formellement) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t}(i, x, t) + \text{div}(u(i, x, t) \mathbf{v}(i, x)) \\ &= \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} a(j, i, y) (u(j, y, t) - u(i, x, t)) m_{j,i,y}(x) \, dy, \end{aligned} \quad (1.4)$$

avec $u(i, x, 0) = u_{\text{ini}}(i, x)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $i \in E$, où $u(i, x, t)$ est la fonction inconnue et où $u_{\text{ini}} : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\mathbf{v} : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow E \times \mathbb{R}^d$, $m_{j,i,y} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $a : E^2 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des données liées au PDMP.

Dans le vocabulaire de l'analyse numérique, ces équations apparaissent comme des équations différentielles partielles de type hyperbolique linéaire, couplées par leur second membre. Dans [P8], nous proposons un schéma de type volumes finis explicite décentré amont pour ces équations (dans le cadre général où les mesures n'admettent pas nécessairement de densité).

Contrairement au cadre usuel d'étude de ce type d'équations, où les fonctions sont généralement intégrables (L_1) et bornées (L_∞), les solutions sont ici des densités de probabilités, c'est-à-dire des fonctions certes intégrables mais pas nécessairement bornées. Ce cadre inhabituel nous amène à l'emploi de techniques nouvelles pour ce type d'étude. A titre d'exemple, certains passages à la limite nécessitent qu'une famille de solutions approchées soit relativement compacte, ce qui nous conduit, dans notre cadre, à devoir démontrer que la famille de probabilités approchées fournie par le schéma est tendue. Pour cela, nous construisons une suite de rayons à deux indices, qui permet de contrôler la propagation de la masse de probabilités liée aux sauts du processus ainsi que celle liée à son évolution déterministe entre les sauts. Ceci s'avère assez technique. De la même façon, les démonstrations usuelles reposent sur des inégalités de type BV (Bounded Variation) faibles, qu'il semble impossible d'obtenir ici dans un cadre général. Ceci nous amène à un résultat de convergence sous une condition du type "pas d'espace"/"pas de temps" qui tend vers zéro (ainsi que le pas de temps), alors que les conditions usuelles, appelées conditions CFL (Courant–Friedrichs–Lewy), sont du type inverse, à savoir "pas de temps"/"pas d'espace" borné. Ceci constitue une différence essentielle entre le cadre probabiliste de ce travail et le cadre usuel.

Ce schéma a été testé sur différents systèmes de petite taille, qui montrent sa bonne performance. Cependant, sur quelques exemples pour lesquels des quantités asymptotiques sont atteignables analytiquement, on a pu observer de petites disparités lorsque l'on se rapproche du régime stationnaire. Ceci nous a amené à développer un nouveau schéma de volumes finis dans [P13], cette fois-ci de type implicite. Après avoir écrit un premier schéma implicite de type décentré amont classique, nous nous sommes aperçus, en étudiant la convergence de ce schéma, que nous avons besoin pour conclure, de résultats du type

$$\forall R, T > 0, \forall i \in E, \lim_{h_{\mathcal{M}} \rightarrow 0} h_{\mathcal{M}} \times \int_0^T |P_t^{\mathcal{M}, \delta t}(i, \cdot)|_{BV(B(0, R))} dt = 0, \quad (1.5)$$

où $h_{\mathcal{M}}$ et δt sont respectivement les pas d'espace et de temps, $P_t^{\mathcal{M}, \delta t}(i, x) dx$ représente l'approximation de $\rho_t(i, dx)$ fournie par le schéma, et $|\cdot|_{BV(B(0, R))}$

est la semi-norme BV sur la boule fermée $B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$. Malheureusement, comme pour le schéma explicite, les papiers antérieurs montrant ce type de résultats, ne s'appliquent pas au cadre L_1 de notre étude. Nous avons alors développé une nouvelle inégalité de type BV-faible, de la forme :

$$\int_0^T |P_t^{\mathcal{M}, \delta}(i, \cdot)|_{BV(B(0, R))} dt \leq \frac{C}{h_{\mathcal{M}}^{1/q}}, \quad (1.6)$$

pour un $1 < q < 2$, à partir de laquelle (1.5) se déduit aisément. Pour montrer cette inégalité, nous utilisons des techniques inspirées de papiers de Boccardo, Droniou, Gallouet, Herbin et Vazquez (références précises dans le chapitre 5), qui ne fonctionnent cependant pas pour un schéma de type décentré amont classique, nécessitant un terme de viscosité. Ceci nous a amené à considérer un schéma intermédiaire entre un schéma décentré amont et un schéma de Lax-Friedrichs modifié, qui comprend quant à lui un terme de viscosité. Grâce à l'inégalité BV-faible, le résultat de convergence obtenu ici est valide dès que les pas de temps et d'espace tendent vers 0, sans aucune condition de type CFL ou CFL inverse. Par ailleurs, cette inégalité BV-faible est indépendante du schéma et peut être utilisée telle quelle dans d'autres contextes. La démonstration de l'inégalité BV-faible est le point le plus technique de ce travail, ainsi que de montrer que l'on peut appliquer cette inégalité à la solution du schéma. Un autre point technique est, dans une moindre mesure, la tension de la famille de lois approchées, que l'on montre ici en construisant explicitement une fonction de Liapounov \mathcal{V} telle que

$$\sup_{0 \leq s \leq t, 0 < h_{\mathcal{M}}, \delta \leq C_1, 0 < \varepsilon \leq C_2} P_s^{\mathcal{M}, \delta} \mathcal{V} < +\infty,$$

(où $\varepsilon > 0$ est une constante qui intervient dans le terme de viscosité), ce qui permet de conclure, selon une démarche classique en probabilités.

Chapitre 6. Autres travaux en fiabilité dynamique

Dans ce chapitre, nous présentons divers autres travaux dans le domaine de la fiabilité dynamique. Les deux premiers, [P10] et [S1] (travail soumis), sont en collaboration avec Robert Eymard, avec en plus Michel Roussignol pour [S1]. Le dernier concerne la thèse de Margot Desgrouas, que nous avons co-encadrée avec Christiane Coccozza-Thivent (50%) et qui a été soutenue le 30 janvier 2007.

L'objectif de [P10] est de montrer à un public de type ingénieur, d'une part comment modéliser un exemple concret à l'aide d'un processus de Markov déterministe par morceaux, d'autre part comment évaluer numériquement les quantités d'intérêt associées. Pour ce faire, nous nous intéressons à un cas-test, proposé en 2003 par la société française Air Liquide à un comité technique de l'ESRA (European Safety and Reliability Association). Il s'agit

d'un système de production de gaz, pour lequel il faut calculer différents critères : les disponibilités asymptotiques du système et de la production, ainsi que les fréquences annuelles asymptotiques de perte totale de production et de perte de production nominale. Le système étudié est de dimension réduite, mais évolue en fonction d'un contexte environnemental typique de la fiabilité dynamique. Nous modélisons ce système à l'aide d'un PDMP puis nous calculons les critères d'intérêt, d'une part par méthode de volumes finis implicite, d'autre part par simulation de Monte-Carlo. Les critères d'intérêt étant ici asymptotiques, nous calculons les critères instantanés correspondants jusqu'à ce qu'ils soient stabilisés, du moins pour la méthode de volumes finis. Pour la simulation de Monte-Carlo, nous préférons utiliser le caractère régénératif du PDMP sous-jacent et calculer les quantités d'intérêt sur un cycle. Les résultats numériques obtenus par les deux méthodes sont cohérents, les temps de calculs étant en revanche nettement à l'avantage de la méthode de volumes finis.

Le travail suivant, [S1], est consacré à des études de sensibilité en fiabilité dynamique : les caractéristiques du PDMP sous-jacent sont supposées dépendre d'une famille de paramètres et le problème est de comparer l'influence qu'ont ces différents paramètres sur divers critères fiabilistes, à horizon fini et infini. Les critères d'intérêt sont de la forme $R(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R(t)}{t}$, avec

$$R(t) = \int_0^t \rho_s h \, ds,$$

où h est une fonction régulière bornée. L'influence d'un paramètre p est étudiée au travers de la dérivée du critère par rapport à p . Pour un critère à horizon fini, l'existence de cette dérivée provient de celle de $\frac{\partial}{\partial p}(\rho_s h)$, que l'on montre à l'aide d'un théorème général donnant des propriétés de régularité de solutions d'équations différentielles et des équations de Chapman-Kolmogorov, vérifiées par $\rho_s h$. En pratique, la dérivée $\frac{\partial}{\partial p}(\rho_s h)$ implique généralement h , mais aussi les $\frac{\partial h}{\partial x_k}$ pour $1 \leq k \leq d$ (et éventuellement $\frac{\partial h}{\partial p}$), et l'on ne sait pas l'évaluer directement. On utilise alors une forme de dualité et on introduit une fonction φ_t , que l'on appelle fonction d'importance associée à (h, t) , et qui est telle que

$$H\varphi_t(i, x, s) = h(i, x)$$

pour tout $(i, x, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times [0, t[$, avec $\varphi_t(i, x, t) = 0$ pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$, où H est défini par (1.3). On montre que, pour h indépendante de p , on a :

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\int_0^t \rho_s h \, ds \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_0^t \rho_s H\varphi_t(\cdot, \cdot, s) \, ds \right) = - \int_0^t \rho_s \frac{\partial H}{\partial p} \varphi_t(\cdot, \cdot, s) \, ds$$

où $\frac{\partial H}{\partial p}$ représente l'opérateur dérivé de H . On en déduit aisément $\frac{\partial}{\partial p}(R(t))$ pour h éventuellement dépendante de p . La formulation obtenue est une

extension aux PDMP des résultats obtenus par (Gandini, 1990) pour les processus de Markov de sauts à espace d'état fini. Les résultats pour les critères à horizon infini sont obtenus de façon similaire, en introduisant une fonction potentiel Uh , solution de $H_0Uh(i, x) = \pi h - h(i, x)$ pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$, où π est la loi stationnaire du PDMP (que l'on suppose exister et être unique). Les résultats obtenus dans ce cas sont une extension de ceux de (Cao et Chen, 1997). L'intérêt de ce travail est de réduire le calcul des dérivées des critères par rapport à p à celui des fonctions d'importance et potentiels, en plus de l'évaluation initiale des lois marginales, nécessaires au calcul du critère étudié. Lorsque les paramètres p sont nombreux, les fonctions d'importance et potentiels étant indépendantes du paramètre par rapport auquel on dérive, cette méthode apparaît comme plus économique que la méthode usuelle de différences finies.

Enfin, nous terminons ce chapitre en présentant rapidement les travaux effectués par Margot Desgrouas lors de sa thèse, consacrée au comportement asymptotique des PDMP, cf (Desgrouas, 2007). Dans un premier temps, Margot Desgrouas s'est intéressée à l'étude des lois stationnaires pour un PDMP (existence, unicité), ainsi qu'à la convergence de ce PDMP. Elle a en particulier étudié le caractère régénératif d'un PDMP et essayé de donner des conditions suffisantes pour qu'un PDMP soit Harris récurrent positif. Lorsque l'espace des variables continues est de dimension 1, les conditions obtenues semblent plutôt satisfaisantes. En dimension supérieure, ces conditions pourraient sans doute être quelque peu affinées. Dans un deuxième temps, Margot Desgrouas s'est intéressée à l'évaluation numérique de critères asymptotiques pour un PDMP, qui s'expriment à l'aide de sa loi stationnaire (sous des conditions qui assurent son existence et son unicité). Partant de la caractérisation de cette loi stationnaire à l'aide du générateur du PDMP, Robert Eymard lui a proposé un algorithme de type volumes finis, permettant d'approximer cette loi stationnaire. Margot Desgrouas a démontré la convergence de cet algorithme lorsque l'espace des variables continues est de dimension 1 et borné. Elle a aussi appliqué ses résultats (existence et unicité d'une loi stationnaire, convergence vers cette loi, calcul numérique) à de petits exemples issus de la fiabilité classique, que l'on ne savait pas traiter auparavant, sinon par simulation de Monte-Carlo.

Chapitre 7. Conclusion, Travaux en cours, Projets

Diverses perspectives sont données tout-au-long de ce mémoire, qui sont autant de pistes pour poursuivre les travaux effectués. Dans ce dernier chapitre, nous complétons ces perspectives par un aperçu de quelques travaux en cours et autres projets, les uns et les autres à des stades divers d'avancement.

1.2 English version

Context

The objective of this document is to present the main part of my research work, which proposes some contributions in the field of mathematics for reliability. Let us first recall that since the founding works of (Barlow et Proschan, 1965, 1975), this field is concerned with the study of the functioning of a so-called system, where a system can stand for any machine or device liable to be operational or out of order at some given time. Such a study may be done through two different approaches, which may be respectively qualified as static and dynamic: the first one is concerned with the properties of a system at some fixed time t , such as the study of structure functions, Bayesian networks, fault trees... On the contrary, the other one considers its evolution with time. This document is devoted to this last aspect, and more specifically, to the study of systems randomly evolving in time, with evolution modelled by a stochastic process. This kind of study may be performed through two different points of view: one is statistical, which aims at finding the best stochastic model fitting with data (and eventually with experts advice), and the other one is probability, which starts from a known stochastic model and aims at analyzing the random evolution of a system and at anticipating its future. As for us, we leave aside any statistical aspects to concentrate on a probability approach.

From an industrial point of view, random failures of a system may have different consequences, with economical impact, because of repair and unavailability costs, and/or safety impact, because of components critical to environment or health. This induces constraints, which impose to an industrialist to control the good functioning of his operating system. Such constraints are given in terms of indicators, which provide measures for the performances of a system, its quality, its reliability, its functioning cost... A first problem for an industrialist then is to compute such indicators, for which a full analytical form is not always available or which may be difficult to assess numerically. A second problem also is to find solutions for improving such indicators, in order to increase safety or profit. Most of the scope of this document lies in line with those two problems: first chapters (Chapters 2 & 3) are devoted to the study of maintenance policies, which may help improving indicators by preventing some failures; next chapters (Chapters 4, 5 & 6) are mainly concerned with the numerical assessment of indicators for different stochastic models; some part of Chapter 6 also presents some sensitivity analysis, which may help ranking the parameters of a system according to their respective importance or influence on some fixed indicator. The last chapter (Chapter 7) provides information about working papers and projects, among which some are of a different spirit.

Chapter 2. Optimization of maintenance policies

This chapter quickly presents my PhD-thesis (1997-2000), as well as some paper written later on, in collaboration with my PhD-thesis director, Michel Roussignol (UPEMLV), in continuation with my PhD work. My PhD-thesis aims at proposing, studying and optimizing different maintenance policies, both preventive and corrective, for Markov or semi-Markov deteriorating systems with finitely many possible states. Repair durations are generally distributed and fullness degrees of corrective or preventive maintenance may be adjusted. Optimization criteria are asymptotic availability and mean cost per unit time. Whether they are submitted to preventive maintenance or not, all systems evolve according to semi-regenerative processes, and optimization criteria are computed via the Markov renewal theory. Three different studies have been lead on within this framework:

In a first time, we have been interested in optimizing the corrective maintenance degree for a Markov deteriorating system, with respect to its asymptotic availability. This has lead us to put some aging assumption on the system, which has been translated through some monotony of the underlying Markov process with respect to the reversed hazard rate ordering, which is not that usual in reliability for the moment. In case that the repair degree is measured with respect to the same order, the asymptotic availability has been shown in [P2] to be all the better as the repairs are full. Contrary to what might surely have been expected, the usual stochastic order is however insufficient to derive such results. Examples of repair-degree optimization with respect to the asymptotic availability are provided in [P3].

In a second time, we have proposed a preventive maintenance policy for the same system, with markovian deterioration. The state of the system is observed through instantaneous and perfect inspections. The maintenance policy is of the dynamic kind, in the sense that it is linked to the system evolution: by an inspection, if the system is found in an acceptable state, one simply chooses the (random) time for the next inspection; if the system is found too degraded, it is stopped to be preventively maintained. Given such a maintenance policy, we have proved in [P4] that, under technical conditions, the optimal inspection schedule was deterministic. We have also studied the improvements of the studied criteria due to the preventive maintenance policy and found the optimal inspection schemes. This has allowed us to check that, as expected, the sequential inspections schemes proposed here, are more efficient than the periodic ones, which are however frequently used.

In a third and final time, we have studied in [P1] a so-called age maintenance policy (Barlow et Proschan, 1965) for a semi-Markov system. Here again, we have showed that under technical conditions, the optimal policy matches with a deterministic waiting time for the maintenance action. We have also given different conditions for the maintenance policy to improve

the asymptotic availability, according to the behavior of the failure rate after some new start (increasing, decreasing, decreasing and next increasing...).

The next study performed later on with Michel Roussignol in [P5], is concerned with a Markov deteriorating system, submitted to the same dynamic preventive maintenance policy as in the PhD thesis. Criteria of interest are the reliability and the asymptotic failure rate, which are linked to the time to first failure of the system and hence are of a very different kind from those studied in the thesis. Note that, though presenting a clear interest for applications, the asymptotic failure rate has not been much studied yet in the reliability literature, which is likely due to generally higher difficulties for its assessment than for other criteria. We here begin with establishing Markov renewal equations, which are fulfilled by the reliability of the maintained system. Such equations are defective, in the sense that the mass of the underlying kernel is strictly below one. Using some normalization procedure, we boil down to true Markov renewal equations, from where we deduce some asymptotic form for the reliability of the shape $R(t) \sim C \times e^{-\beta_0 t}$ when t goes to infinity, where β_0 may be numerically estimated. We next show that β_0 is the asymptotic failure rate. Finally, conditions are provided in terms of the maintenance policy so that it improves both reliability and asymptotic failure rate.

Chapter 3. Preventive replacement of obsolescent components

This chapter is also devoted to preventive maintenance, but in a different context. A first part of the study has been achieved in collaboration with Pierre-Etienne Labeau (Université Libre de Bruxelles), and the second part, alone. The context is the following: identical and independent components are considered, which are instantaneously replaced in case of failure. Contrary to the usual framework for this kind of study, where the spare components are generally assumed to be exact copies of the ones they replace all along the period of interest, we here take into consideration some technological innovation, from where new components become available, which are more reliable and cost-effective than the older ones. All components set up after the arrival of the innovation are assumed to be issued from the newer technology. The problem then is to decide which replacement strategy is the best, in order to replace the older by the newer components: is it better to replace all older components by the newer ones as soon as those are available (purely preventive strategy) or is it better to introduce the newer one by one, only at failure of an older one (purely corrective strategy)? Could mixed strategies, associating both preventive and corrective replacements, be still better? Optimization is lead on with respect of a cost function on a finite time horizon, which includes economical dependence between replacements.

When all components have constant failure rates, we have proved with Pierre-Etienne Labeau [P6] that the only possible optimal strategies were either purely corrective, purely preventive or nearly purely preventive (preventive replacement of all older components at first failure among them). Precise conditions are given, in terms of the parameters of both types of components and of the mission time, which provide the optimal strategy. Main tools are Poisson processes and order statistics of independent and identically exponentially distributed random variables.

In [P14], I have been interested in the case of components with general failure rates (aging components). In this case, one may numerically observe that the optimal strategy on a finite time horizon does not evolve regularly with respect of the components parameters. From a theoretical point of view, as the cost functions involve renewal functions with no known explicit forms and order statistics of non necessarily identically distributed random variables, it seems that there is no hope for finding precise conditions characterizing the optimal strategy on a finite time horizon in that case. We however get precise conditions linked to the distributions of the components life times and to their other parameters, which provides the optimal strategy on an infinite horizon. We thus show that, contrary to the case of constant failure rates and most probably contrary to intuition too, any replacement strategy may here be optimal on an infinite horizon. Numerical optimizations actually show that this result is still true for a finite time horizon (even short). We also observe numerically that asymptotic theoretical results seem to be a good indicator about the strategy to choose in the finite case.

Chapter 4. Bounds for indicators in the reliability field

In this chapter, we now come to the part of this document devoted to numerical assessment of indicators. Oppositely to next chapter, which is concerned with methods from numerical analysis, the tools used here still come from the probability field.

The objects of interest are different quantities in reliability, which generally require approximations for their numerical evaluation, at least in an industrial context. For practical purposes, the precision of such approximations is not always checked, because it is theoretically unknown, or because of too costly an evaluation, in terms of computation time and/or software development. We here propose simple bounds for those quantities, which are easy to compute and adjustable, according to some time step $h > 0$. In each case, the convergence of the bounds towards the goal quantity is proved when h goes to zero. Algorithms for the computations of the bounds are provided.

The founding principle for these bounds is very simple and consists in bounding any random variable (r.v.) with general distribution by two discrete approximating r.v. with range in $h\mathbb{Z}$. If this approximating principle

of a general r.v. by a discrete r.v. clearly is not new, the fact remains that the bounds used here do not seem to have been much explored in the literature. As we shall see further, they however allow to bound lots of different quantities in reliability, under very various models assumptions.

In [P9], we first note that, starting from the discrete random bounds with range in $h\mathbb{Z}$ for any general r.v., it is straightforward to derive bounds for sums of independent r.v. with general distributions, which are sums of discrete r.v., all with range in the same $h\mathbb{Z}$. We derive bounds for different quantities in reliability which are linked to sums of independent r.v., such as the reliability of a system formed of components in cold standby, renewal functions, or survival functions associated to geometric sums of r.v.. Such bounds are of a similar form but only involve r.v. with range in $h\mathbb{N}$. Their computation is simple and easy to implement. Note that the quantities of interest here have been the object of numerous publications dealing with their numerical assessment, and especially renewal functions. One can thus look at (Dohi *et al.*, 2002) with a great number of references, among which specific ones, devoted to a single family of distribution, and others, dedicated to the general case. Some comparison study has been lead on with the last category, which puts in evidence the interest of the present method, for which the precision of the results is immediately known, whereas other methods generally require additional work for its evaluation (in case it is available).

Starting from a semi-Markov process (SMP) in continuous time, the same bounding principle is used in [P11] to construct two discrete time SMPs which bound the initial SMP. The successive states visited by both discrete time SMPs are the same as those of the initial SMP. The inter-arrival durations of the two discrete SMPs are bounds for the inter-arrival durations of the initial SMP. (One stays a little longer in each state, the other a little shorter). As before, the bounding r.v., namely the inter-arrival durations of the discrete SMPs here, have all distributions with support in $h\mathbb{N}$. Once those two bounding discrete SMPs constructed, we show that the solution of a Markov renewal equation (MRE) associated to the initial SMP may be bounded by solutions of MREs associated to the discrete SMPs. Such discrete MREs are easy to solve and provide simple bounds for solutions of continuous time MREs. The main interest of this work for applications is that most finite time quantities in reliability linked to a semi-markovian system are solutions of continuous time MREs, which cannot be solved explicitly. The present method provides bounds for such quantities with a known and adjustable precision (through the choice of h), which does not seem to be always the case with other methods, see (Csenki, 2002) and references therein for instance.

We now come to the end of this chapter, which is dedicated to Markov systems ([P12]). Such models are very common in industry and their main interest comes from the fact that most indicators are explicitly known in

such a context. As far as finite time indicators are concerned, their exact formulation though involves matrix exponentiations, which may be difficult to evaluate in case of large systems. This has led to numerous publications devoted to their numerical assessment, see (Moler et Van Loan, 1978, 2003) and references therein for instance. The previous results from the semi-markovian context are here specialized to the markovian case. The bounds thus provided may here be highly simplified. As for the transition probabilities, such bounds yield approximations for them, which are easy to interpret in terms of the underlying Markov process. Such approximations turn out to be near from classical methods (Euler's forward approximation and external uniformization), as well as from (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004a). We have hence compared the results provided by the present method to these other ones, which was generally to the advantage of the present one, both for the quality of the results and for the computation times.

Chapter 5. Finite volume schemes in dynamic reliability

In this chapter, we go on with studying the numerical assessment of indicators in reliability but in the different context of dynamic reliability. All works are in common with Robert Eymard (UPEMLV), in addition with Christiane Cocozza-Thivent (UPEMLV) for [P7] and [P8], Michel Roussignol for [P7], and Alain Prignet (UPEMLV) for [P13].

Dynamic reliability was introduced by (Devooght, 1997) and is concerned with the study of so-called hybrid systems, in the sense that their evolution is governed by two kinds of dynamics: one is discrete and corresponds to the arrival of isolated events, such as failure of a component or opening of a valve; the other is continuous with range in \mathbb{R}^d and is linked to the evolution of continuous variables such as temperature, pressure, elapsed time in the current state... Both dynamics interact in each other, which makes their study more difficult. Their evolution is modelled with a Piecewise Deterministic Markov Process (PDMP), introduced and studied by (Davis, 1984, 1993). A PDMP is a process $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ with range in some $E \times \mathbb{R}^d$ (where E is a finite state space), which jumps at countably many isolated random times. Between jumps, the discrete component I_t is fixed whereas X_t follows a deterministic trajectory which depends on I_t . The transition rate from I_{t-} to I_t is a function $a(I_{t-}, I_t, X_{t-})$. By a jump of I_t at time t , the "continuous" variable X_t may also jumps and the after-jump distribution of X_t is some $\mu_{(I_{t-}, I_t, X_{t-})}(dy)$. Davis's model also includes eventual jumps of the process when reaching the boundary of its state space, which are not taken into consideration here.

In case of a hybrid system modelled by a PDMP, reliability indicators generally are unavailable in a closed form so that they are most of the time evaluated through Monte-Carlo simulations, which often induces long

computation times. We here propose alternate methods from the numerical analysis field, based on finite volume schemes. To our knowledge, such methods do not seem to have been used before in reliability. As finite time reliability indicators may be expressed in terms of the marginal distribution of the PDMP (the distribution at time t), we here concentrate on its numerical evaluation. With that aim, we first characterize this distribution as the single solution of a set of integro-differential equations [P7]. Next, starting from such equations, two finite volume schemes are proposed and proved to converge, whereof one is explicit [P8], and the other implicit [P13].

Due to the Markov property of a PDMP, we may write the associated Chapman-Kolmogorov equations (also called Dynkin equations). According to such equations, the marginal distribution $\rho_t = (\rho_t(i, dx))_{i \in E}$ of the process at time t fulfills

$$\rho_t h = \rho_{\text{ini}} h + \int_0^t \rho_s H_0 h \, ds \quad (1.7)$$

for all $t \geq 0$ and all $h : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ regular enough, where H_0 is the extended generator of the process and ρ_{ini} is its initial distribution. Such equations are given in (Davis, 1993), as well as the generator H_0 . The purpose of [P7] is to show that $(\rho_t)_{t \geq 0}$ is the unique solution of such equations. With that aim, we classically extend (1.7) to time dependent functions and we show that

$$0 = (\rho_{\text{ini}} \varphi)(\cdot, \cdot, 0) + \int_{\mathbb{R}_+} \rho_s H \varphi(\cdot, \cdot, s) \, ds \quad (1.8)$$

for all $\varphi : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ regular with a compact support, where

$$H \varphi(\cdot, \cdot, s) = H_0(\varphi(\cdot, \cdot, s)) + \frac{\partial}{\partial s} \varphi(\cdot, \cdot, s). \quad (1.9)$$

We next have to prove that $\rho_s(i, dx) \times ds$ is the single Radon measure fulfilling those last equations, which allows to conclude about the initial problem using some continuity argument. For that purpose, we set $\tilde{m}(i, dx, ds)$ to be the difference between two solutions to (1.8) and we notice that $\tilde{m}\psi = 0$ for all function ψ of the shape $\psi(\cdot, \cdot, s) = H \varphi(\cdot, \cdot, s)$. Using transforms of φ along the trajectories of the process and a functional version of the Cauchy-Lipschitz's theorem, we next show that $\tilde{m}\psi = 0$ is true for sufficiently many functions ψ to conclude that \tilde{m} is zero. This allows to put an end to our uniqueness problem.

In case where ρ_{ini} and $\mu_{(i,j,x)}(dy)$ admit a density with respect to Lebesgue measure, the marginal distribution ρ_t of the PDMP admits one too: $\rho_t(i, dx) = u(i, x, t) \, dx$. Chapman-Kolmogorov equations then write (at

least formally):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t}(i, x, t) + \operatorname{div}(u(i, x, t)\mathbf{v}(i, x)) \\ &= \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} a(j, i, y) (u(j, y, t) - u(i, x, t)) m_{j,i,y}(x) dy, \end{aligned} \quad (1.10)$$

with $u(i, x, 0) = u_{\text{ini}}(i, x)$ for almost all $x \in \mathbb{R}^d$, all $t \in \mathbb{R}_+$ and all $i \in E$, where $u(i, x, t)$ is the unknown function and where $u_{\text{ini}} : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\mathbf{v} : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow E \times \mathbb{R}^d$, $m_{j,i,y} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ and $a : E^2 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ are data linked to the PDMP.

In the vocabulary from numerical analysis, such partial differential equations are hyperbolic linear equations, coupled by their right-hand side. A finite volume scheme is proposed in [P8] for such equations, which is an explicit upstream weighting scheme (in the general case of non necessarily absolutely continuous measures).

Contrary to the usual context of study for such equations, where functions generally are integrable (L_1) and bounded (L_∞), solutions here are probability density functions, which certainly are integrable but not necessarily bounded. This unusual framework requires the use of new methods for this kind of study. As an example, some limits taking require a family of approximated solutions to be relatively compact. In our context, we hence have to prove the tightness of the family of approximated probability measures provided by the scheme. For that purpose, we construct a double sequence of radii, which allows to control the propagation of the probability mass due both to the jumps of the process and to its deterministic evolution between jumps. This happens to be technical. In the same way, usual proofs are based on weak BV (Bounded Variation) inequalities, which seem impossible to obtain here in a general framework. This leads us to a convergence result under some inverse CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) condition, which here writes: "space step"/"time step" goes to zero (as well as the time step), whereas usual results are often obtained under direct CFL condition, such as "time step"/"space step" bounded. This clearly differentiate the probability framework of this paper from the usual one.

This scheme has been tested for different small systems, and has proved to be generally quite efficient. However, looking at a few examples for which asymptotic quantities are available in closed form, little discrepancies may be observed when approaching the stationary mode. This has lead us to develop a new finite volume scheme in [P13], now of the implicit type. After having written a first implicit upstream weighted scheme and studied its convergence, we have observed that results like

$$\forall R, T > 0, \forall i \in E, \lim_{h_{\mathcal{M}} \rightarrow 0} h_{\mathcal{M}} \times \int_0^T |P_t^{\mathcal{M}, \delta}(i, \cdot)|_{BV(B(0,R))} dt = 0, \quad (1.11)$$

were needed to put an end to the proof, where $h_{\mathcal{M}}$ and δt respectively are the space and time steps, $P_t^{\mathcal{M},\delta t}(i, x) dx$ stands for the approximation of $\rho_t(i, dx)$ as provided by the scheme, and $|\cdot|_{BV(B(0,R))}$ is the BV semi-norm on the closed ball $B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$. Unfortunately, just as for the explicit scheme, previous papers showing such results cannot be applied in the L_1 framework of the present study. We consequently had to develop a new weak-BV inequality, which here writes:

$$\int_0^T |P_t^{\mathcal{M},\delta t}(i, \cdot)|_{BV(B(0,R))} dt \leq \frac{C}{h_{\mathcal{M}}^{1/q}}, \quad (1.12)$$

for some $1 < q < 2$, from where (1.11) is easy to derive. The technics used to prove this inequality take their inspiration in papers by Boccardo, Droniou, Gallouet, Herbin and Vazquez (precise references in Chapter 5), which however do not fit with a classical upstream weighted scheme and require a non vanishing viscosity term. This has lead us to consider an intermediate scheme between an upstream weighted one and a modified Lax-Friedrichs one, which does contain a viscosity term. Due to the weak-BV inequality, the convergence result is here obtained without any CFL or inverse CFL condition. Besides, this inequality is independent of the scheme and may consequently be useful in other contexts. The proof of this inequality is the most technical point of the present work, as well as proving that this inequality may be used for the solution of the scheme. Another technical point is, to a smaller degree, the tightness of the family of approximate probability measures, which is here shown by explicitly constructing a Liapounov function \mathcal{V} such that

$$\sup_{0 \leq s \leq t, 0 < h_{\mathcal{M}}, \delta t \leq C_1, 0 < \varepsilon \leq C_2} P_s^{\mathcal{M},\delta t} \mathcal{V} < +\infty,$$

where $\varepsilon > 0$ is some constant number which intervenes in the viscosity term. Classical arguments from probability theory then allow to conclude.

Chapter 6. Other studies in dynamic reliability

This chapter is devoted to other works in dynamic reliability. The first two studies ([P10] and [S1], submitted work) are in common with Robert Eymard, in addition with Michel Roussignol for [S1]. The last part of this chapter deals with the PhD thesis of Margot Desgrouas, which we have supervised in common with Christiane Coccozza-Thivent (50%). The PhD defense took place on 30th January 2007.

The purpose of [P10] is to show to some audience of engineers, first how to model a concrete system with a piecewise deterministic Markov process and secondly, how to numerically assess the quantities of interest for this

system. With that aim, a benchmark is considered, which was first proposed by the French company Air Liquide to some technical committee of ESRA (European Safety and Reliability Association): this benchmark deals with a system of gas production, for which assessment of different criteria is required, such as asymptotic availability both of the system and of the production, as well as asymptotic annual frequencies of loss of production, both total loss and loss of nominal production. The studied system is of small size but evolves according to some environmental context typical of dynamic reliability. We model this system with a PDMP and next compute the required criteria both by an implicit finite volume scheme and by Monte-Carlo simulations. Such criteria are asymptotic and we compute their transitory versions until they are stabilized, at least for the finite volume method. As for the Monte-Carlo simulations, we have better use the regenerative character of the underlying PDMP and compute the required quantities on a cycle. The numerical results provided by both methods are coherent, with computing times clearly shorter by the finite volume scheme, however.

Next work, [S1], is devoted to sensitivity analysis in dynamic reliability: the characteristics of the underlying PDMP are assumed to depend on some family of parameters; the problem then is to compare their respective influence on different reliability indicators, both in finite and infinite time. The criteria of interest are of the shape $R(t)$ and $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R(t)}{t}$, with

$$R(t) = \int_0^t \rho_s h \, ds,$$

where h is some bounded and regular function. The influence of some parameter p on some criterion is studied through its derivative with respect of p . For a finite time criterion, existence of such a derivative comes from that of $\frac{\partial}{\partial p}(\rho_s h)$, which is shown using some general theorem providing regularity properties for solutions of differential equations, as well as the Chapman-Kolmogorov equations fulfilled by $\rho_s h$. In most cases, the derivative $\frac{\partial}{\partial p}(\rho_s h)$ is a function of both h and all $\frac{\partial h}{\partial x_k}$'s with $1 \leq k \leq d$ (and eventually $\frac{\partial h}{\partial p}$), which cannot be evaluated directly. We then use some duality property and introduce some new function φ_t , which we call importance function associated to (h, t) . This function is such that

$$H\varphi_t(i, x, s) = h(i, x)$$

for all $(i, x, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times [0, t[$, with $\varphi_t(i, x, t) = 0$ for all $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$, where H is defined by (1.9). We next show that:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\int_0^t \rho_s h \, ds \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_0^t \rho_s H\varphi_t(\cdot, \cdot, s) \, ds \right) = - \int_0^t \rho_s \frac{\partial H}{\partial p} \varphi_t(\cdot, \cdot, s) \, ds$$

for all function h independent on p , where $\frac{\partial H}{\partial p}$ stands for some new operator, derivative operator of H . We easily derive $\frac{\partial}{\partial p}(R(t))$ for functions h which

may now depend on p . The results are an extension to PDMP's of those provided by (Gandini, 1990) for pure jump Markov processes with finite state space. The study of the infinite time criteria is done in the same way by introducing some potential function Uh , solution to $H_0Uh(i, x) = \pi h - h(i, x)$ for all $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$, where π is the stationary distribution of the PDMP (which is assumed to exist and to be unique). The provided results are an extension of those by (Cao et Chen, 1997). The main interest of this work is to reduce the numerical assessment of the derivatives of the studied criteria with respect of p to the computation of the importance and potential functions, in addition with the evaluation of the marginal distributions, required for the initial numerical assessment of the criteria. As the importance and potential functions are independent on the choice of the parameter with respect of which differentiation is taken, this method appears as more economical than usual finite differences, in case of a great number of parameters p .

Finally, we end this chapter by quickly presenting the research carried out by Margot Desgrouas during her PhD thesis, devoted to the asymptotic behavior of PDMP's, see (Desgrouas, 2007). In a first time, Margot Desgrouas has been interested in studying stationary distributions for PDMP's (existence and uniqueness), as well as in convergence of PDMP's. She studied more particularly regenerative properties of a PDMP and tried to give sufficient conditions for a PDMP to be positive Harris recurrent. In case of a one-dimensional state space for the continuous variable, the conditions that she obtained seem rather satisfactory. Such conditions might however surely be refined in higher dimensions. In a second time, Margot Desgrouas has been interested in the numerical assessment of asymptotic criteria for a PDMP, which may be expressed in terms of its stationary distribution (under conditions ensuring its existence and uniqueness). Starting from the characterization of this stationary distribution in terms of the PDMP generator, Robert Eymard proposed to her a finite volume scheme for its approximation. Margot Desgrouas proved the convergence of this scheme in case where the state space for the continuous variable is bounded and one-dimensional. She also applied her results (existence and uniqueness of a stationary distribution, convergence towards this distribution, numerical computation) to a few small examples coming from classical reliability, which could not be studied before but by Monte-Carlo simulations.

Chapter 7. Conclusion, Current works, Projects

Different prospects are given all along this document, which provide as many tracks to go on with the presented works. Such prospects are completed in this last chapter by some glance at current works and other projects, with respective different degrees of advancement.

Chapitre 2

Optimisation de politiques de maintenance

Mots clefs : Maintenance, Optimisation, Processus markoviens et semi-markoviens à espace d'états fini, Processus semi-régénératifs, Théorie du renouvellement markovien, Processus de Markov monotones, Ordres stochastiques usuel et selon le taux de hasard inversé.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, je présente rapidement le travail que j'ai effectué pendant ma thèse sous la direction de Michel Roussignol, ainsi qu'un prolongement que nous avons fait ensemble alors que j'étais déjà maître de conférences à l'université de Marne-la-Vallée. Ce dernier travail est présenté de façon un peu plus détaillée.

L'objet de ma thèse (§2.2) est de proposer et d'étudier différentes politiques de maintenance, dans le but d'améliorer les performances d'un système. Selon les chapitres, les dégradations sont supposées markoviennes ou semi-markoviennes, à espace d'états fini. Les durées de réparations suivent des lois générales. Le premier chapitre, décrit dans le paragraphe 2.2.1, est consacré à l'étude d'un système pouvant être réparé plus ou moins complètement lorsqu'il tombe en panne. Le problème est alors d'optimiser le degré de réparation du système. Le critère utilisé est la disponibilité asymptotique. Dans les deuxième et troisième chapitres (§2.2.2 et 2.2.3), nous nous intéressons à deux politiques de maintenance préventive différentes, qui sont optimisées relativement à la disponibilité et au coût moyen unitaire asymptotiques. Le travail fait ultérieurement (§2.3) est consacré à un système markovien soumis à une politique de maintenance préventive séquentielle, similaire à celle du deuxième chapitre de ma thèse. Les critères étudiés sont la fiabilité et le taux de défaillance asymptotique, c'est-à-dire des critères liés à la première durée de bon fonctionnement du système. Ces critères sont

donc d'une essence très différente de ceux étudiés dans ma thèse. Quelques remarques et perspectives sont données dans le paragraphe 2.4, et concluent cette présentation.

2.2 Thèse

2.2.1 Chapitre 1

[P2] Sophie Bloch-Mercier (2001), Monotone Markov processes with respect to the reversed hazard rate ordering : an application to reliability, *Journal of Applied Probability*, 38 (1), pp. 195-208.

[P3] Sophie Bloch-Mercier (2001), Optimal restarting distribution after repair for a Markov deteriorating system, *Reliability Engineering and System Safety*, 74(2), pp. 181-191.

Remarque : dans tout le mémoire, les travaux publiés dans des revues internationales sont rappelés, au moment où leur contenu en est explicité. Les articles de conférences ne sont en revanche généralement pas mentionnés. Nous y faisons cependant parfois référence, lorsqu'ils présentent des résultats complémentaires à ceux des articles de revues.

Le premier chapitre de ma thèse est consacré à l'étude d'un système réparable prenant ses valeurs dans un espace d'état fini partitionné en deux sous-espaces, les états de marche \mathcal{U} et les états de panne \mathcal{D} . Le système se dégrade suivant un processus markovien de sauts $(X_t)_{t \geq 0}$ à espace d'états fini. Les durées de réparations suivent des lois générales. Le système peut être réparé plus ou moins complètement lorsqu'il tombe en panne. Cela signifie par exemple que le système comporte un certain nombre de composants indispensables à son bon fonctionnement, qu'il est donc nécessaire de réparer, mais comporte aussi d'autres composants, dont la réparation est facultative. Le degré de réparation peut aussi être aléatoire : imaginons par exemple que deux composants en parallèle soient réparés simultanément. On peut alors redémarrer le système dès que la réparation de l'un des deux composants est terminée, ce qui conduit à un redémarrage aléatoire du système. On suppose que la probabilité de redémarrer dans un état de marche i est indépendante du passé et vaut $D_R(i)$. Le degré de réparation est alors mesuré par un vecteur de probabilité D_R sur \mathcal{U} . Le système ainsi modélisé est semi-régénératif (cf (Çinlar, 1975) ou (Cocozza-Thivent, 1997) par exemple), les cycles étant délimités par les fins de période d'arrêt pour maintenance corrective. La théorie du renouvellement markovien nous permet alors de calculer la disponibilité asymptotique, définie par

$$A_\infty(D_R) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{U})$$

Nous nous intéressons ensuite à l'optimisation de cette disponibilité asymptotique relativement au degré de réparation D_R . Nous montrons ainsi [P2] que, si le système se dégrade en fonctionnant (hypothèse de vieillissement), la disponibilité asymptotique est d'autant plus élevée que la réparation est complète. La remise à neuf du système à chaque réparation est alors optimale. L'hypothèse de vieillissement du système est traduite à l'aide d'un processus de Markov monotone relativement à l'ordre pour le taux de hasard inversé (ordre rh : Reversed Hazard Rate en anglais, (Block *et al.*, 1998) ou (Shaked et Shanthikumar, 2007)), dont le générateur est de plus triangulaire. Le degré de réparation est lui aussi mesuré par l'ordre rh . Nous montrons en revanche que l'ordre stochastique usuel n'est suffisant ni pour traduire l'hypothèse de vieillissement du système, ni pour mesurer le degré de réparation, pour avoir la propriété souhaitée, à savoir que la disponibilité asymptotique augmente avec le degré de réparation. Cette étude nous a amené à développer des résultats complémentaires à ceux existant (cf (Kijima, 1997), (Kijima, 1998) ou (Stoyan, 1983)), concernant les processus de Markov monotones relativement à l'ordre rh [P2] et à l'ordre stochastique usuel (uniquement dans la thèse).

Dans [P3], nous observons sur quelques exemples que la loi optimale de redémarrage après réparation peut être aléatoire. Nous donnons alors des conditions suffisantes pour que cette loi optimale soit au contraire déterministe, ce qui en simplifie notablement la recherche.

Dans ce même papier, nous étudions aussi deux types de systèmes classiques en fiabilité, à savoir les systèmes de type k sur n et les systèmes formés par n composants identiques en redondance passive (Barlow et Proschan, 1965). Pour ces deux types de systèmes, nous montrons qu'il existe un nombre spécifique de composants à réparer pour optimiser la disponibilité asymptotique et nous le calculons explicitement.

2.2.2 Chapitre 2

[P4] Sophie Bloch-Mercier (2002), A preventive maintenance policy with sequential checking procedure for a Markov deteriorating system, *European Journal of Operational Research*, 142(3), pp. 548-576.

Le deuxième chapitre de ma thèse est ensuite consacré à l'étude d'une politique de maintenance préventive de type dynamique, au sens où l'état courant du système influe sur cette politique de maintenance. Le système initial, c'est-à-dire non soumis à la politique de maintenance préventive, est similaire à celui du premier chapitre : la dégradation est markovienne, les durées de réparation suivent des lois générales, le redémarrage après réparation est contrôlé par un vecteur de probabilité D_R sur \mathcal{U} . L'état courant du système en marche n'est connu que par des inspections, que l'on suppose parfaites

et instantanées. Ces inspections sont séquentielles (Barlow *et al.*, 1963), au sens où le rythme des inspections est adapté à l'évolution réelle du système : si, lors d'une inspection, le système observé n'est pas trop dégradé, on le laisse fonctionner tel quel et on choisit une nouvelle date d'inspection (aléatoire) en fonction de l'état courant du système. Sinon, on l'arrête pour le maintenir. Les durées des opérations de maintenance dépendent de l'état de dégradation du système. Les redémarrages après maintenance préventive sont contrôlés par un vecteur de probabilité D_M sur \mathcal{U} . Comme pour le système initial, une panne du système est instantanément détectée et une réparation est alors effectuée.

Pour un tel système, nous calculons la disponibilité et le coût moyen unitaire (par unité de temps) asymptotiques. Les coûts pris en compte sont les coûts d'inspection et les coûts unitaires de maintenance préventive et corrective. Le processus décrivant l'évolution du système maintenu est semi-régénératif et les calculs des critères asymptotiques sont effectués à l'aide de la théorie du renouvellement markovien. L'apport de la politique de maintenance est ensuite étudié : sous des conditions naturelles portant sur la maintenance, nous montrons que la politique de maintenance améliore les deux critères étudiés dès que les opérations de maintenance ne sont pas trop longues en moyenne, des seuils précis étant fournis. Comme on pouvait s'y attendre, la disponibilité et le coût moyen unitaire asymptotiques du système maintenu ne dépendent des durées de maintenance préventive et corrective que par leurs moyennes. En revanche, ils dépendent des lois des intervalles inter-inspections, et pas seulement de leurs moyennes. Ceci nous amène à étudier leur optimisation relativement à ces lois. Nous constatons sur quelques exemples qu'il semblerait que l'on puisse toujours restreindre cette optimisation aux seules variables inter-inspections de type déterministe. Cette observation est aussi faite dans (Cocozza-Thivent, 2000) qui étudie un modèle très proche du nôtre (avec des méthodes cependant très différentes). Nous démontrons cette conjecture sous une hypothèse supplémentaire, fréquemment vérifiée. La recherche des lois inter-inspections optimales en est alors grandement facilitée.

2.2.3 Chapitre 3

[P1] Sophie Bloch-Mercier (2000), Stationary availability of a semi-Markov system with random maintenance, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 16(3), pp. 219-234.

Le troisième et dernier chapitre de ma thèse est consacrée à l'étude d'une politique de maintenance préventive suivant l'âge, selon le vocabulaire de (Barlow et Proschan, 1965), cette fois-ci pour un système réparable semi-markovien : le système est maintenu préventivement au bout d'une durée

S de fonctionnement (aléatoire), sauf s'il est tombé en panne avant d'être maintenu, auquel cas il est réparé normalement. Cette séquence est répétée indéfiniment à l'issue de chaque redémarrage après une période d'arrêt pour maintenance préventive ou corrective. Les durées de maintenance (préventive ou corrective) dépendent de l'état du système, ainsi que les vecteurs de probabilité contrôlant les redémarrages après les périodes d'arrêt pour maintenance.

Pour un tel système, nous calculons la disponibilité asymptotique, en utilisant le fait que le système maintenu est là encore de type semi-régénératif, comme dans les chapitres 1 et 2. Dans le cas particulier où le temps d'attente de la maintenance S suit une loi exponentielle, le système est en fait semi-markovien. Cela nous permet de calculer en plus la disponibilité instantanée (i.e. à un instant t fini), en utilisant les techniques de (Cocozza-Thivent et Roussignol, 1997).

Sous une hypothèse technique supplémentaire, nous montrons aussi que, comme au chapitre 2, la politique optimale correspond à un temps d'attente de la maintenance S de type déterministe. Sous cette même hypothèse, nous donnons ensuite différentes conditions pour que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique, selon le comportement du taux de panne après un redémarrage (croissant, décroissant, décroissant puis croissant, ...). Différents cas classiques sont aussi envisagés, comme celui d'un système k sur n .

2.3 Poursuite du travail de thèse

[P5] Sophie Mercier, Michel Roussignol (2003), Asymptotic failure rate of a Markov deteriorating system with preventive maintenance, *Journal of Applied Probability*, 40 (1), pp. 1-19.

Dans ce dernier papier élaboré à l'issue de ma thèse, Michel Roussignol et moi-même nous sommes intéressés à un système se dégradant suivant un processus markovien de sauts à espace d'états fini, comme dans les deux premiers chapitres de celle-ci. La période d'intérêt est ici la première durée de bon fonctionnement et les états de panne sont considérés comme absorbants. Tant qu'il est en marche, l'état du système peut être observé à l'aide d'inspections instantanées parfaites et on peut, le cas échéant, l'arrêter pour lui faire subir une maintenance préventive. Une panne est en revanche instantanément détectée. La politique de maintenance préventive considérée est la politique séquentielle du deuxième chapitre de la thèse, où le rythme des inspections est adapté à l'évolution réelle du système (cf §2.2.2). Le système maintenu a une durée de fonctionnement T finie presque sûrement (p.s.) et les critères d'étude sont la fiabilité $R_i(t)$ du système maintenu partant de

l'état de marche i , avec

$$\begin{aligned} R_i(t) &= \mathbb{P}_i(T > t) \\ &= \mathbb{P}_i(\text{le système est en marche ou en maintenance à l'instant } t) \end{aligned}$$

et le taux de défaillance asymptotique β , défini par :

$$\beta = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \mathbb{P}(T \leq t + h | T > t) \quad (2.1)$$

Avant d'aborder l'étude de ces critères, précisons tout d'abord notre modèle, ainsi que quelques notations : le système est au départ en marche et évolue selon un processus markovien $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, \dots, m + p\}$, où $1, 2, \dots, m$ représentent les états de marche et $m + 1, \dots, m + p$ les états de panne (supposés absorbants). Le système tombe en panne au bout d'une durée T^{ini} , supposée finie presque sûrement. Le semi-groupe de transition associé à $(X_t)_{t \geq 0}$ est $(P_t(i, j))_{i, j \in E}$ avec

$$P_t(i, j) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$$

pour tous $i, j \in E$ et $P_t(i, j) = 0$ pour $m + 1 \leq i \leq m + p$ et $1 \leq j \leq m + p$. Les états de marche sont séparés en deux parties : les "bons" états, ceux allant de 1 à q , où $1 \leq q \leq m - 1$, et les états dégradés, allant de $q + 1$ à m . Enfin, on introduit des lois de probabilité $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ sur \mathbb{R}_+ telles que $\int_0^{+\infty} t \cdot \rho_i(dt) > 0$, pour tout $1 \leq i \leq m$. La politique de maintenance préventive est alors définie de la façon suivante : on pose $S_0 = 0$ et on note S_1 une v.a.r. indépendante de $(X_t)_{t \geq 0}$, de loi ρ_{X_0} (où $X_0 \in \{1, \dots, m\}$). Tant que le système fonctionne, il est inspecté aux instants $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ définis récursivement de la façon suivante :

- si $X_{S_n} = j \in \{1, \dots, q\}$, le système est en bon état et on se contente de choisir la date de la prochaine inspection, qui aura lieu à l'instant $S_{n+1} = S_n + U_n$, où U_n a pour loi ρ_j (si le système n'est pas tombé en panne auparavant).
- si $X_{S_n} = j \in \{q + 1, \dots, m\}$, le système est dégradé. On l'arrête pour lui faire subir une opération de maintenance préventive qui remet le système dans l'état k ($1 \leq k \leq m$) avec la probabilité $D(j, k)$ et qui a alors une durée de loi $\mu_{j,k}$.

Après une action de maintenance préventive, une nouvelle séquence d'inspections est réinitialisée, définie de la même façon qu'à partir de l'état initial. Notons que les hypothèses d'indépendance qui s'imposent sont précisées dans [P5] et ne sont pas reprises ici.

Sous de telles hypothèses, nous commençons par étudier la fiabilité $R_i(t)$ du système maintenu et nous montrons qu'elle vérifie des équations de renouvellement markovien. Pour les écrire, nous notons $*$ la convolution entre

deux mesures et $P_s(i, j) \rho_i$ la mesure de densité $P_s(i, j)$ par rapport à $\rho_i(ds)$ (i.e. : $(P_s(i, j) \rho_i)(ds) = P_s(i, j) \rho_i(ds)$). En utilisant la propriété de Markov à l'instant S_1 , on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.1 *La fiabilité $R_i(t)$ du système maintenu vérifie les équations de renouvellement markovien suivantes :*

$$R_i(t) = G_i(t) + \sum_{j=1}^m \int_{[0,t]} R_j(t-s) \nu_{i,j}(ds) \quad (2.2)$$

pour tout $1 \leq i \leq m$, avec :

$$\nu_{i,j}(ds) = \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq q\}} P_s(i, j) \rho_i(ds) + \sum_{k=q+1}^m D(k, j) ((P_s(i, k) \rho_i) * \mu_{k,j})(ds) \quad (2.3)$$

$$G_i(t) = R_i^{ini}(t) \mathbb{P}_i(S_1 > t) + \sum_{k=q+1}^m \sum_{j=1}^m \int_{[0,t]} \rho_i(ds) \mu_{k,j}([t-s, +\infty[) P_s(i, k) D(k, j)$$

où $R_i^{ini}(t) = \mathbb{P}_i(T^{ini} > t)$.

Les équations (2.2) sont déficientes, au sens où le noyau sous-jacent est de masse totale strictement plus petite que 1. En suivant la méthode de (Asmussen, 2003, Chapitre X, Théorème 2.6.), on transforme alors ces équations pour se ramener à un nouveau noyau de masse 1, pour lequel on peut appliquer un théorème de renouvellement, du moins moyennant quelques hypothèses techniques, indiquées dans le théorème suivant.

Théorème 2.2 *Supposons que la matrice $\bar{A}^0 = \left(\int_0^{+\infty} \nu_{i,j}(du) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$ admette une composante irréductible notée I (où $\nu_{i,j}(du)$ est définie par (2.3)) et que :*

- *La transformée de Laplace de ρ_i converge sur \mathbb{R} , pour tout $i \in I$,*
- *La transformée de Laplace de $\mu_{k,j}$ converge sur \mathbb{R} , pour tout $q+1 \leq k \leq m$ et tout $j \in I$ tels que $D(k, j) > 0$,*
- *Il existe $j_0 \in I$ et k_0 ($q+1 \leq k_0 \leq m$) tels que $D(k_0, j_0) > 0$ et tels que la mesure μ_{k_0, j_0} admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Pour $\beta > 0$, on pose alors $A^\beta = \left(a_{i,j}^\beta \right)_{i,j \in I}$ où

$$a_{i,j}^\beta = \int_0^{+\infty} e^{\beta u} \nu_{i,j}(du)$$

pour tous $i, j \in I$.

Sous ces hypothèses et notations, il existe $\beta_0 > 0$ tel que A^{β_0} a pour rayon spectral 1 et deux vecteurs η^{β_0} et ξ^{β_0} de coordonnées strictement positives tels que $A^{\beta_0}\eta^{\beta_0} = \eta^{\beta_0}$ et $\xi^{\beta_0}A^{\beta_0} = \xi^{\beta_0}$. De plus, on a pour tout $i \in I$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\beta_0 t} R_i(t) = \eta_i^{\beta_0} \frac{\sum_{j \in I} \xi_j^{\beta_0} \int_0^\infty e^{\beta_0 u} G_j(u) du}{\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \xi_i^{\beta_0} \eta_j^{\beta_0} \int_0^\infty u \cdot e^{\beta_0 u} \nu_{i,j}(du)} := L_i$$

où $0 < L_i < +\infty$.

Ce résultat signifie qu'un équivalent asymptotique de la fiabilité est de la forme $R_i(t) \sim L_i \times e^{-\beta_0 t}$ quand t tend vers $+\infty$, avec β_0 indépendante de l'état de marche de départ i .

Nous nous intéressons maintenant au taux de défaillance asymptotique. Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \mathbb{P}(T \leq t+h | T > t) &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{R_i(t)} \frac{R_i(t+h) - R_i(t)}{h} \\ &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R_i^+(t)}{R_i(t)} \\ &= - \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\beta_0 t} R_i^+(t)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\beta_0 t} R_i(t)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dès que la dérivée à droite $R_i^+(t)$ de $R_i(t)$ et la limite au numérateur existent.

Dans [P5], nous montrons alors que $R_i^+(t)$ existe et vérifie une équation de renouvellement markovien du même type que $R_i(t)$. Ceci nous permet d'en déduire que la limite existe dans (2.4) et vaut β_0 . Cela signifie que le taux de défaillance asymptotique du système maintenu existe et vaut β_0 , où β_0 est tel que A^{β_0} a pour rayon spectral 1. Ce taux β_0 est calculable numériquement. (Un exemple est donné dans [P5]).

Enfin, nous montrons dans [P5] que, sous des conditions naturelles portant sur la maintenance, la politique de maintenance améliore à la fois la fiabilité et le taux de défaillance asymptotique.

2.4 Conclusion - Perspectives

En ce qui concerne le premier chapitre de ma thèse, son intérêt réside sans doute dans l'usage de notions peut-être pas encore complètement traditionnelles en fiabilité, à savoir l'ordre rh et les processus de Markov monotones relativement à cet ordre. En effet, si l'usage de l'ordre rh s'est développé ces dernières années, cf (Ahmad et Kayid, 2005), (Chandra et Roy, 2001), (Finkelstein, 2002), (Gupta et Gupta, 2007), (Hu et Li, 2007),

(Nanda et Shaked, 2001) par exemple, il n'en demeure pas moins qu'il reste, pour l'instant, encore beaucoup moins utilisé que l'ordre dual, à savoir l'ordre hr (hr pour hazard rate). Ainsi, le caractère vieillissant d'un composant est par exemple très souvent traduit par l'hypothèse IHR (Increasing Hazard Rate), introduite par Barlow et Proschan dans les années 60, alors que l'hypothèse duale de vieillissement (DRHR, pour Decreasing Reversed Hazard Rate) n'est en revanche que peu utilisée. Beaucoup de lois très classiques en fiabilité sont pourtant DRHR, comme la loi Gamma qui est toujours DRHR quels que soient ses paramètres, alors qu'elle n'est IHR que pour un paramètre de forme plus grand que 1. D'où l'intérêt d'approfondir l'hypothèse DRHR en vue des applications à la fiabilité. Plus généralement, même si certains auteurs ont commencé à le faire ces dernières années, il serait en fait certainement intéressant de développer de façon systématique les propriétés de l'ordre rh , les unes simplement duales de celles de l'ordre hr , les autres propres à l'ordre rh .

En ce qui concerne le deuxième chapitre de ma thèse et le dernier article en commun avec Michel Roussignol, un premier intérêt réside dans la modélisation dynamique de la maintenance, qui permet d'adapter son rythme à l'évolution réelle du système. Dans les exemples proposés, qui correspondent à des systèmes vieillissants, nous avons en effet constaté numériquement que, comme l'on pouvait s'y attendre, lorsque l'on considère le plan d'inspections séquentielles optimal, le rythme des inspections s'accélère avec la dégradation du système. Ceci conduit à des performances et à des coûts inférieurs à ceux obtenus pour un plan d'inspections périodiques optimal, pourtant le plus utilisé en pratique. Un deuxième intérêt de cette étude réside aussi dans la diversité des critères étudiés, qui peut permettre de contrôler des aspects complémentaires de l'évolution d'un système, l'idée étant alors d'optimiser la maintenance par rapport à un critère donné, sous des contraintes liées aux autres. Enfin, un dernier intérêt de ce travail et plus particulièrement de sa dernière partie, réside sans doute dans l'utilisation d'un critère, le taux de défaillance asymptotique, qui semble avoir été moins étudié que d'autres dans la littérature consacrée à la maintenance, cf (Sherif et Smith, 1981) ou (Wang, 2002) par exemple.

Le dernier chapitre de ma thèse est quant à lui consacré à un modèle de maintenance selon l'âge tout à fait classique (Barlow et Proschan, 1965). Le modèle de dégradation est en revanche un peu plus élaboré que dans les chapitres précédents. La modélisation semi-markovienne employée ici n'est cependant que peu utilisée par les industriels, d'une part parce que les calculs à temps fini ne sont pas toujours très aisés avec cette modélisation (cf §4.3), d'autre part parce qu'elle n'est guère adaptée à l'étude de systèmes cohérents, pourtant usuels en fiabilité : rappelons en effet qu'un système cohérent formé par exemple de deux sous-systèmes semi-markoviens indépendants en parallèle n'évolue pas selon un processus semi-markovien, de

sorte que le caractère semi-markovien n'est pas conservé par la formation de systèmes cohérents. Ceci restreint considérablement l'usage pratique de tels processus en fiabilité. Pour décrire l'évolution de systèmes cohérents formés de sous-systèmes markoviens, nous avons besoin d'une modélisation plus puissante, comme les processus de Markov déterministes par morceaux dont nous parlerons au chapitre 5.

Chapitre 3

Remplacement préventif de composants obsolètes

Mots clefs : Obsolescence, Maintenance, Optimisation, Processus de Poisson, Processus de renouvellement, Statistique d'ordre, Espaces normalisés, Taux de panne croissant (IFR).

3.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à des composants identiques et indépendants. À un certain moment ($t = 0$), de nouveaux composants, issus d'une nouvelle technologie, apparaissent sur le marché. Ces nouveaux composants sont plus fiables que les anciens, produisent avec un meilleur taux et/ou consomment moins d'énergie. Ils peuvent être substitués aux anciens composants sans problème de compatibilité. Il n'y a pas de stock d'anciens composants et, après l'instant 0, tous les composants qui tombent en panne, qu'ils soient de l'ancienne ou de la nouvelle génération, sont remplacés instantanément par des composants du nouveau type. Si les nouveaux composants sont beaucoup plus performants que les anciens, il peut être intéressant de remplacer préventivement tous les anciens composants par des nouveaux dès le départ, à $t = 0$ (stratégie purement préventive). Si au contraire, il n'y a que très peu de différences entre les deux technologies, une stratégie purement corrective sera alors plus adaptée. D'autres stratégies, intermédiaires entre ces deux extrêmes, peuvent aussi être envisagées (détails plus loin). L'objet d'intérêt ici est l'étude des stratégies optimales par rapport à une fonction de coût. Celle-ci tient compte de coûts de remplacements correctifs et préventifs (avec une dépendance économique dans le cas de remplacements simultanés (Dekker *et al.*, 1997)), et d'un coût constant par unité de temps, qui correspond à des coûts de fonctionnement (coûts de consommation énergétique par exemple) et/ou à d'éventuels bénéfices liés à la production, différents selon le type d'unité utilisée.

Nous commençons par présenter le modèle en détail dans le paragraphe 3.2. Nous considérons ensuite le cas particulier où les taux de panne des différents composants sont constants (§3.3), avant d'aborder le cas général (§3.4). Nous concluons et donnons quelques perspectives dans le dernier paragraphe (§3.5).

3.2 Le modèle

On considère n composants identiques et indépendants ($n \geq 2$), issue d'une ancienne technologie. A l'instant $t = 0$, moment où les nouveaux composants arrivent, ces composants sont en activité et pour $i = 1, \dots, n$, on note U_i la durée de vie résiduelle du i -ième composant après l'instant $t = 0$, la v.a.r. U_i étant supposée à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Les temps de panne successifs de ces n anciens composants sont les statistiques d'ordre de (U_1, \dots, U_n) , que l'on note $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$, avec $U_{1:n} < \dots < U_{n:n}$ p.s..

Les stratégies possibles de remplacement préventif de ces anciens composants par des composants d'un nouveau type sont :

- la stratégie 0 (purement préventive) : les n anciens composants sont tous remplacés à l'instant 0 par des nouveaux.
- la stratégie K ($1 \leq K \leq n$) : on ne fait au départ que des remplacements correctifs puis, lors de la K -ième panne parmi les anciens composants (qui a lieu à l'instant $U_{K:n}$), on reffectue un remplacement correctif pour le composant en panne et simultanément, $n - K$ remplacements préventifs pour les $n - K$ anciens composants encore en activité (cf Fig. 3.1).
- la stratégie n (purement corrective) : les anciens composants sont remplacés par des nouveaux uniquement lorsqu'ils tombent en panne.

Lorsqu'un nouveau composant est introduit à l'instant 0 ou à un instant $U_{i:n}$, on le remplace ensuite instantanément par un composant du même type, dès qu'il tombe en panne. Tous les composants sont supposés indépendants.

Les coûts pris en compte sont :

- les coûts de remplacement : à chaque sollicitation de l'équipe de maintenance (ou à chaque fois qu'il faut ouvrir le système si les composants font partie d'un même système), cela coûte r unités monétaires ; chaque remplacement préventif (correctif) coûte en plus c_p (c_f) unités, avec $c_f \geq c_p$.

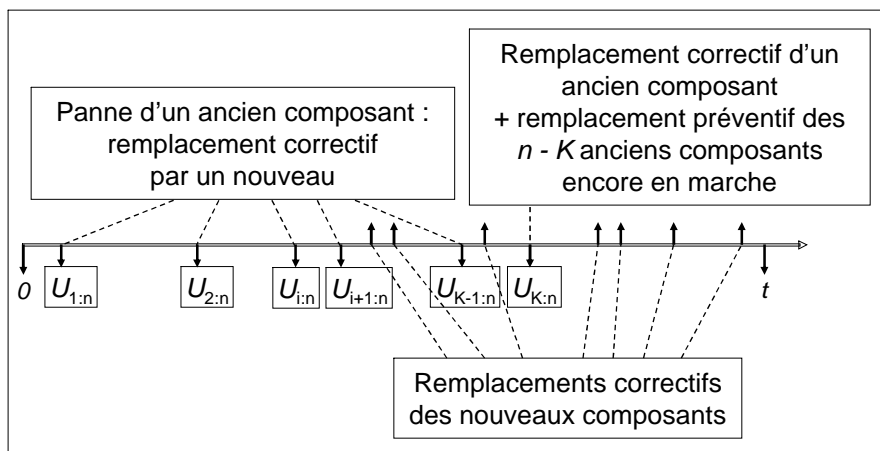


FIG. 3.1 – Schéma des remplacements préventifs et correctifs pour la stratégie K

- un coût constant unitaire (i.e. par unité de temps), qui vaut η pour un nouveau composant et $\eta + \nu$ pour un ancien composant. η et $\eta + \nu$ peuvent être de signe quelconque car on peut tenir compte d'un éventuel bénéfice. En revanche $\nu \geq 0$ car les nouveaux composants coûtent moins chers à l'utilisation que les anciens, ou rapportent plus.

Pour $0 \leq K \leq n$, on note $C_K(t)$ le coût moyen total sur $[0, t]$ lorsque la stratégie K est utilisée.

3.3 Cas de taux de panne constants

[P6] Sophie Mercier, Pierre-Etienne Labeau (2004), Optimal replacement policy for a series system with obsolescence, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 20 (1), pp. 73-91.

Le modèle présenté dans ce papier en commun avec Pierre-Etienne Labeau est à peu près le même que dans (Elmakis *et al.*, 2002), où aucune étude théorique n'avait cependant été faite. Les taux de panne des anciens et des nouveaux composants sont supposés constants (respectivement λ_U et λ_V). Tous les coûts sont actualisés à l'instant $t = 0$, avec un taux d'intérêt constant i_r . Cela signifie par exemple que le coût d'un remplacement correctif accompagné d'un remplacement préventif simultané de j composants à l'instant u coûte : $(r + c_f + j c_p) (1 + i_r)^{-u}$. De même, le coût de fonctionnement de j nouveaux composants sur un intervalle $[t_1, t_2]$ est :

$$\int_{t_1}^{t_2} j \eta (1 + i_r)^{-u} du = \frac{j \eta}{\ln(1 + i_r)} [(1 + i_r)^{-t_1} - (1 + i_r)^{-t_2}]$$

On pose :

$$b = \frac{1}{\lambda_1} [(r + c_f) (\lambda_U - \lambda_V) - \lambda_1 c_p + \nu]$$

$$\alpha = \frac{n\lambda_1 + \ln(1 + i_r)}{n\lambda_1}$$

et

$$R(t, v, w) = \lambda_U \int_0^t e^{-\lambda_U v u} (1 - e^{-\lambda_U u})^{w-1} du = B(v, w) (1 - I_{e^{-\lambda_U t}}(v, w))$$

pour tous $t \geq 0, v, w > 0$, où les symboles B et I_x représentent les fonctions beta et beta incomplètes.

Avec ces notations, les fonctions de coût associées à chacune des stratégies sont données par le théorème suivant :

Théorème 3.1

$$C_0(t) = nc_p + r + n((r + c_f) \lambda_V + \eta) \frac{1 - (1 + i_r)^{-t}}{\ln(1 + i_r)}$$

Pour $1 \leq K \leq n$:

$$C_K(t) = n((r + c_f) \lambda_V + \eta) \frac{1 - (1 + i_r)^{-t}}{\ln(1 + i_r)} + c_p K \mathbf{C}_n^K(n - K) R(t, n\alpha - K + 1, K)$$

$$+ \sum_{j=1}^K (c_p + b) j \mathbf{C}_n^j R(t, n\alpha - j + 1, j)$$

En particulier :

$$C_n(t) = n((r + c_f) \lambda_V + \eta) \frac{1 - (1 + i_r)^{-t}}{\ln(1 + i_r)} + n(c_p + b) \frac{1 - e^{-(n(\alpha-1)+1)\lambda_U t}}{n(\alpha - 1) + 1}$$

Nous nous intéressons ensuite à l'optimisation de la stratégie de maintenance préventive en fonction du temps de mission t . Nous montrons en particulier que les seules stratégies optimales possibles sont soit purement préventive (stratégie 0), soit presque purement préventive (stratégie 1), soit purement corrective (stratégie n). Des conditions précises portant sur les données du modèle et sur le temps de mission t sont données pour que la stratégie optimale soit 0, 1 ou n .

Cette dichotomie concernant les stratégies optimales, soit purement corrective, soit (presque) purement préventive, est conforme à l'intuition : dans le cas de taux de panne constants, s'il y a une réelle amélioration entre l'ancienne et la nouvelle technologie, il faut échanger très rapidement les anciens composants par des nouveaux. Sinon, il ne faudra jamais le faire, ou du moins, pas préventivement.

3.4 Cas de taux de panne non constants

[P14] Sophie Mercier (2008) Optimal replacement policy for obsolete components with general failure rates, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Volume 24, Issue 3, May/June 2008, pp. 221-235, available online 8 Jan. 2008.

Nous nous intéressons maintenant au cas général, où les taux de panne ne sont plus constants, le problème étant de voir si la dichotomie observée ci-dessus est encore valide dans ce cas.

Dans le cas de taux de panne constants (§ 3.3), les durées de vie résiduelles des anciens composants à $t = 0$ (U_1, \dots, U_n) étaient i.i.d., de loi exponentielle de taux λ_U . Les statistiques d'ordre associées ($U_{1:n}, \dots, U_{n:n}$) étaient donc très simples et bien connues. Lorsque les U_i suivent des lois générales, qui plus est a priori différentes, les statistiques d'ordre associées sont difficilement atteignables, ce qui complexifie notablement l'étude. De ce fait, nous avons choisi de simplifier légèrement le problème ici en n'actualisant plus les différents coûts, ainsi que nous l'avons fait dans le paragraphe précédent. Cela signifie par exemple que le coût de remplacement correctif d'un composant accompagné du remplacement préventif simultané de j composants coûte $r + c_f + jc_p$, quel que soit l'instant de remplacement. De même, le coût de fonctionnement de j nouveaux composants sur un intervalle $[t_1, t_2]$ est $j\eta(t_2 - t_1)$ (où $0 \leq t_1 \leq t_2$). Les résultats qualitatifs sous l'hypothèse d'une actualisation des coûts, seraient cependant tout à fait similaires à ceux obtenus ici.

Rappelons que, lorsqu'un nouveau composant est introduit à l'instant 0 ou à l'instant $U_{i:n}$, il est ensuite remplacé instantanément par un autre nouveau composant dès qu'il tombe en panne. Les durées de vie successives de ces composants sont supposées former un processus de renouvellement, avec $U_{i:n}$ comme délai éventuel. Elles ont la même loi qu'une certaine v.a.r V , que l'on suppose telle que $\mathbb{P}(0 \leq V < \infty) = 1$ et $\mathbb{P}(V > 0) > 0$. La fonction de renouvellement associée au processus de renouvellement sans délai est notée ρ_V . On rappelle que :

$$\rho_V(t) = \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{V^{(1)} + \dots + V^{(k)} \leq t\}} \right)$$

pour tout $t \geq 0$, où $V^{(1)}, \dots, V^{(k)}, \dots$ sont les instants successifs d'arrivée du processus de renouvellement. $\rho_V(t)$ représente le nombre moyen d'arrivées sur $[0, t]$.

Avec cette notation, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.2 *Soit $t \geq 0$. Pour $K = 0$, on a :*

$$C_0(t) = r + n(\eta t + c_p + (r + c_f)\rho_V(t))$$

et, pour $1 \leq K \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
C_K(t) &= n\eta t + \sum_{i=1}^K [(r + c_f)(F_{U_{i:n}}(t) + \mathbb{E}(\rho_V((t - U_{i:n})^+))) + \nu \mathbb{E}(U_{i:n}^t)] \\
&\quad + (n - K) [c_p F_{U_{K:n}}(t) + (r + c_f) \mathbb{E}(\rho_V((t - U_{K:n})^+)) + \nu \mathbb{E}(U_{K:n}^t)]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où, pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^t = \min(x, t)$.

Contrairement au cas de taux de panne constants, où le processus de renouvellement sous-jacent est un processus de Poisson homogène, la fonction de renouvellement ρ_V n'est généralement pas connue ici de façon explicite (de même que les statistiques d'ordre $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$). Il semble donc impossible d'optimiser $C_K(t)$ par rapport à K d'un point de vue théorique, comme nous l'avons fait dans le cas de taux constants. Nous sommes cependant capables de donner des résultats sur un horizon infini. En utilisant le théorème de Blackwell, on montre tout d'abord le résultat suivant :

Proposition 3.3 *Supposons que la loi de V soit non arithmétique et que $\mathbb{E}(U_i) < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On pose*

$$g_K(\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} (C_{K+1}(t) - C_K(t))$$

pour tout $0 \leq K \leq n-1$ et on note D_K le K -ième espace normalisé associé à la statistique d'ordre $(U_{i:n})_{1 \leq i \leq n}$ défini par $D_K := (n - K)(U_{K+1:n} - U_{K:n})$ pour $1 \leq K \leq n-1$ et $D_0 = n\bar{U}_{1:n}$. On a alors :

$$g_K(\infty) = r + c_f - c_p + \left(\nu - \frac{r + c_f}{\mathbb{E}(V)} \right) \mathbb{E}(D_K)$$

pour tout $1 \leq K \leq n-1$ et

$$g_0(\infty) = c_f - c_p + \left(\nu - \frac{r + c_f}{\mathbb{E}(V)} \right) \mathbb{E}(D_0)$$

Dans le cas où $\nu \geq \frac{r+c_f}{\mathbb{E}(V)}$, on en déduit immédiatement que $g_K(\infty) \geq 0$ pour tout K et donc que la stratégie optimale est la stratégie 0. Dans le cas où $\nu < \frac{r+c_f}{\mathbb{E}(V)}$, on a besoin de contrôler l'évolution des espaces normalisés moyens $\mathbb{E}(D_K)$ en fonction de K . Pour cela, on utilise un résultat de (Barlow et Proschan, 1966), qui affirme que si U_1, \dots, U_n sont i.i.d. IFR, alors $(D_K)_{0 \leq K \leq n-1}$ est stochastiquement décroissante et donc $(\mathbb{E}(D_K))_{0 \leq K \leq n-1}$ est décroissante. Notons que ce résultat est faux lorsque les v.a.r. sont IFR mais n'ont pas même loi. L'hypothèse i.i.d. est donc nécessaire, hypothèse qui n'est a priori pas vérifiée ici dans le cas général.

Deux scenari sont cependant envisageables pour que les U_i soient bien i.i.d. (et IFR) : en premier lieu, les composants ont pu tout simplement être installés simultanément. A titre d'exemple, on peut penser, comme nous l'a indiqué Marc Bouissou (R&D EdF), à des composants importants des centrales nucléaires françaises, qui ont, pour une grosse part, été mises en service à la même époque. Sous l'hypothèse naturelle selon laquelle les durées de vie totales des composants sont de plus IFR, les durées de vie résiduelles des composants à l'instant $t = 0$ sont alors i.i.d. IFR, comme nous le souhaitons. Une autre façon de réaliser cette hypothèse est d'imaginer que les composants sont au contraire en place depuis longtemps et qu'ils ont déjà été remplacés un grand nombre de fois. On peut alors considérer que la durée de vie résiduelle d'un composant à l'instant $t = 0$ est le temps d'attente de la prochaine arrivée pour un processus de renouvellement stationnaire, de même loi inter-arrivées qu'une certaine v.a.r. $U^{(0)}$ (supposée telle que $0 < \mathbb{E}(U^{(0)}) < +\infty$). Les v.a.r U_i apparaissent alors comme des v.a.r. i.i.d., dont la loi admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction $f_U(t)$, donnée par :

$$f_U(t) = \frac{\bar{F}_{U^{(0)}}(t)}{\mathbb{E}(U^{(0)})} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \quad (3.2)$$

Il est par ailleurs naturel de supposer que $U^{(0)}$, qui représente la durée de vie totale d'un ancien composant à l'état neuf, est IFR. On vérifie alors que ce caractère IFR est transmis aux durées de vie résiduelles, ce qui permet d'affirmer que les U_i sont bien i.i.d. IFR.

Sous cette hypothèse (U_i i.i.d. IFR), on est maintenant capable d'identifier précisément la politique optimale de remplacements préventifs en fonction des données sur un horizon infini. Les résultats obtenus montrent en particulier que, contrairement au cas de taux constants, n'importe quelle stratégie parmi $0, 1, \dots, n$ peut maintenant être optimale pour un horizon infini, et donc aussi pour un horizon fini suffisamment grand (cf [P14] pour plus de détails). Des études numériques montrent qu'il en est en fait de même pour n'importe quel horizon fini t , même petit. Elles montrent aussi que la stratégie optimale de remplacements préventifs n'évolue pas de façon régulière en fonction de l'horizon de temps t (cf un exemple d'évolution dans la Figure 3.2). Ceci confirme le fait qu'il n'y a sans doute aucun espoir d'avoir une identification claire de la politique de maintenance optimale en fonction des données pour un horizon fini dans un cadre général. On peut cependant noter que la politique optimale semble se stabiliser assez rapidement lorsque t augmente (de l'ordre de quelques durées de vie moyennes d'un composant sur les exemples étudiés), de sorte que la politique optimale à long terme est sans doute un bon indicateur de la politique à suivre pour un horizon fini.

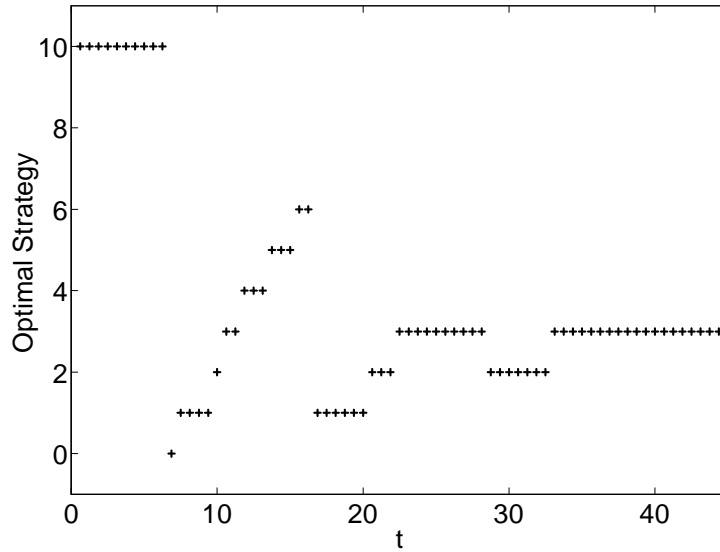


FIG. 3.2 – Un exemple d'évolution de la politique optimale en fonction de t . Données : $U^{(0)}$ et V suivent des lois de Weibull de paramètres respectifs $(\frac{1}{10^3}; 2.8)$ et $(\frac{1}{2 \times 10^3}; 3.2)$; f_U est donnée par l'équation (3.2); $n = 10$; $\eta = 0$; $\nu = 0.095$; $c_p = 5$; $c_f = 7$; $r = 4$.

3.5 Conclusion - Perspectives

Contrairement à ce à quoi on aurait peut-être pu s'attendre, les résultats qualitatifs obtenus dans [P6] et dans [P14] sont clairement différents. Dans le cadre étudié dans ces deux papiers, modéliser la durée de vie d'un composant par une loi générale ou par une loi exponentielle de même moyenne a donc une réelle influence quant au choix de la stratégie de remplacement des composants obsolètes. Sur le pourquoi, on peut peut-être imaginer que ceci est dû à l'allure des fonctions de renouvellement, qui, pour une loi générale, comportent fréquemment des changements de concavité (cf Figure 3.3, obtenue avec les résultats du paragraphe 4.2). Quoi qu'il en soit, cette différence dans les résultats qualitatifs montre clairement l'importance de la modélisation de l'évolution intrinsèque de chaque composant (durée de bon fonctionnement, dégradation) pour le choix de la stratégie de remplacements préventifs des composants obsolètes.

Dans la littérature fiabiliste classique consacrée aux politiques de remplacements préventifs, voir (Pierskalla et Voelker, 1976) et (Sherif et Smith, 1981) par exemple, des méthodes très diverses ont été utilisées pour modéliser cette évolution intrinsèque. Dans [P6-P14], nous avons utilisé une modélisation très simple, où la loi de la durée de vie d'un composant était connue sous forme explicite. On pourrait aussi envisager un

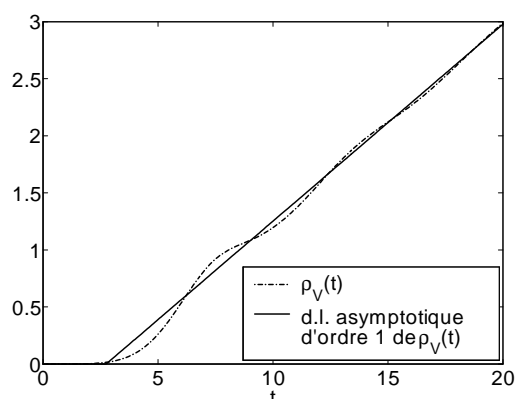


FIG. 3.3 – Fonction de renouvellement associée à $W(10^{-4}, 5)$

composant qui se dégrade selon un processus donné, comme un processus markovien, semi-markovien, Gamma... La durée de bon fonctionnement est alors le temps d'atteinte d'un certain seuil de dégradation. Dans ce cadre, de très nombreuses politiques de remplacements préventifs ont été proposées et étudiées. Cependant, dans la plupart de ces études, un composant usé est remplacé par un nouveau composant de type identique à l'ancien et la possibilité d'une évolution technologique entre les deux composants n'est en général pas envisagée.

En revanche, dans la littérature consacrée au remplacement de composants obsolètes, l'aspect innovation technologique a été beaucoup étudié et a donné lieu à des modélisations très diverses, aussi bien déterministes qu'aléatoires, tant pour le mode d'arrivée de ces innovations que pour leur degré d'innovation. Dans ce type de littérature, voir (Chambers, 2004) par exemple, la durée de vie d'un composant est la plupart du temps liée à son degré d'obsolescence et/ou à sa valeur marchande, c'est-à-dire liée à un environnement extérieur, indépendant de l'évolution intrinsèque du composant : dans ce cadre, un composant est remplacé lorsqu'il y a un trop grand décalage entre l'ancienne technologie dont il est issue et celle, plus moderne, qui est disponible sur le marché. Certains papiers tiennent en plus compte d'une dégradation intrinsèque déterministe pour un composant, qui induit un coût d'entretien de type déterministe, constant par unité de temps.

A part quelques rares exemples comme (Hopp et Nair, 1994), où les auteurs considèrent un composant qui se dégrade selon une chaîne de Markov à espace d'états fini et où il peut y avoir une (unique) innovation technologique à un instant aléatoire, il semblerait que les deux littératures évoquées ci-dessus se soient développées de façon parallèle, avec très peu d'intersections. Il serait donc intéressant de les confronter, ce qui leur permettrait de s'enrichir mutuellement. On pourrait ainsi reprendre certains modèles

d'innovation technologique proposés dans la littérature, mais en envisageant une dégradation intrinsèque aléatoire des composants. En effet, au vu des résultats de [P6-P14], on peut imaginer que, comparée à la dégradation intrinsèque déterministe généralement retenue dans ce type de littérature, une modélisation aléatoire pourrait induire des résultats qualitativement différents. De la même façon, on pourrait imaginer reprendre divers modèles de maintenance préventive classiques en autorisant une évolution de technologies entre les remplacements, cette évolution devant a priori avoir de l'influence quant au choix des instants de remplacements préventifs.

Chapitre 4

Encadrement de quantités fiabilistes

Mots clefs : Approximations numériques, Fonction de renouvellement, Equation de renouvellement markovien, Processus markovien et semi-markovien.

4.1 Introduction

De nombreuses quantités fiabilistes sont calculées à l'aide d'approximations numériques, soit parce que l'on ne dispose pas de leur forme exacte, comme pour la plupart des fonctions de renouvellement, soit parce que leur forme exacte pose des problèmes d'évaluation numérique, comme pour des quantités liées à un gros système markovien. En pratique, la précision de ces évaluations numériques n'est pas toujours contrôlée, soit parce que cette précision est inconnue d'un point de vue théorique, soit parce que son évaluation est trop coûteuse en temps de calcul et/ou de développement logiciel. Pour un industriel, la connaissance de cette précision peut cependant être primordiale, que ce soit d'un point de vue sûreté de fonctionnement ou d'un point de vue économique. Nous nous intéressons ici à diverses quantités fiabilistes, pour lesquelles nous proposons des encadrements par des bornes aisément calculables, et dont la précision peut être ajustée en fonction d'un pas de temps $h > 0$.

Nous commençons (§4.2) par décrire le principe de base de ces encadrements et nous en déduisons des encadrements pour diverses quantités fiabilistes liées à des sommes de v.a.r., comme des fonctions de renouvellement par exemple. Nous donnons ensuite (§4.3) des encadrements pour des quantités fiabilistes à horizon fini liées à un système semi-markovien. Les résultats sont particularisés dans le paragraphe suivant (§4.4) au cas markovien, très utilisé par les industriels. Nous concluons et donnons quelques perspectives dans le dernier paragraphe (§4.5).

4.2 Principe d'encadrement et premières applications

[P9] Sophie Mercier (2007) Discrete random bounds for general random variables and applications to reliability, *European Journal of Operational Research*, Volume 177, Issue 1, Feb. 2007, pp. 378-405, available online 15 Feb. 2006.

Pour tout réel x , on note $[x]$ sa partie entière, où $[x]$ est l'unique entier tel que :

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Le principe d'encadrement de base est très simple et consiste, étant donné une v.a.r. U quelconque et un réel $h > 0$, à encadrer U par les deux v.a.r. discrètes U^h et U^{h+} à valeurs dans $h\mathbb{Z}$ définies par :

$$U^h := h \left\lfloor \frac{U}{h} \right\rfloor \text{ et } U^{h+} := U^h + h. \quad (4.1)$$

On a alors $U^h \leq U < U^{h+}$ et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} U^h(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0^+} U^{h+}(\omega) = U(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega$. Connaissant la loi de U , les lois de U^h et de U^{h+} sont aisément calculables.

Avec ces notations, étant donné un réel $h > 0$ et n v.a.r. U_1, U_2, \dots, U_n , on en déduit immédiatement que

$$U_1 + U_2^h + \dots + U_n^h \leq U_1 + U_2 + \dots + U_n < U_1 + U_2^{h+} + \dots + U_n^{h+}$$

(en pratique, il est généralement préférable de conserver U_1 en lieu et place de U_1^h et U_1^{h+}).

Ceci nous permet d'encadrer plusieurs quantités fiabilistes :

- la fiabilité d'un système formé de composants indépendants en redondance passive, qui est de la forme $\bar{F}_m(t) = \mathbb{P}(U_1 + \dots + U_m > t)$, où les U_i sont des v.a.r. positives indépendantes, ne suivant pas nécessairement la même loi (un générateur de secours est en général différent du générateur principal par exemple), et n'admettant pas nécessairement de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (possibilité de refus de démarrage par exemple, ce qui entraîne un poids en 0 pour la loi de U_i).
- des fonctions de renouvellement, qui mesurent par exemple le nombre moyen de redémarrages sur un intervalle fini $[0, t]$, pour un composant évoluant selon un processus de renouvellement.

- la fiabilité d'un système qui est réparé instantanément lorsqu'il tombe en panne, avec une probabilité q pour que la réparation soit parfaite, et $1 - q$ pour que la réparation ait échoué (Bon et Philippe, 2004). Cette fiabilité est de la forme $\bar{F}_q(t) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^G U_i > t\right)$ où les U_i sont i.i.d. positives, G suit une loi géométrique de paramètre q et est indépendante des U_i . (Dans [P9], nous envisageons le cas général, qui inclut un délai éventuel).

Pour ces trois quantités, nous proposons des encadrements par des quantités similaires, où les U_i sont remplacées par les U_i^h ou les U_i^{h+} . Quelles que soient les lois des v.a.r. initiales qui interviennent dans ces quantités, on est donc toujours ramené à évaluer ces mêmes quantités pour des v.a.r. qui sont discrètes, toutes à valeurs dans $h\mathbb{N}$. Si ce principe de discrétisation d'une v.a.r. n'est clairement pas nouveau, cf (Dohi *et al.*, 2002) par exemple pour les fonctions de renouvellement, son emploi pour obtenir des encadrements semble en revanche moins usité. Les bornes obtenues sont pourtant très simples et parfaitement adaptées à la programmation informatique. Pour chacune des trois quantités étudiées, des algorithmes de calculs des bornes sont donnés. La convergence de ces bornes lorsque h tend vers 0 est démontrée.

A titre d'exemple, nous donnons ici des résultats obtenus pour les fonctions de renouvellement :

Théorème 4.1 *Soit $(U_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. positives i.i.d. telles que $0 < \mathbb{E}(U_1)$ et soit V_0 une v.a.r. positive indépendante des U_i . Soit R_{V_0, U_1} la fonction de renouvellement associée, définie par*

$$R_{V_0, U_1}(t) = \mathbb{E} \left(1_{\{V_0 \leq t\}} + \sum_{n \geq 1} 1_{\{V_0 + U_1 + \dots + U_n \leq t\}} \right).$$

Pour $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}^$, on note U_n^h et U_n^{h+} les approximations de U_n définies par (4.1). Pour $h > 0$, soient R_{V_0, U_1^h} et $R_{V_0, U_1^{h+}}$ les fonctions de renouvellement respectivement associées à V_0 et $(U_m^h)_{m \in \mathbb{N}^*}$, et à V_0 et $(U_m^{h+})_{m \in \mathbb{N}^*}$. Alors :*

1. *Pour tous $t \geq 0$ et $h > 0$, on a :*

$$R_{V_0, U_1^{h+}}(t) \leq R_{V_0, U_1}(t) \leq R_{V_0, U_1^h}(t) \quad (4.2)$$

2. *Il existe $\alpha > 0$ tel que $R_{V_0, U_1^h}(t) < +\infty$ pour tout $t \geq 0$ et tout $0 < h \leq \alpha$.*

3. Si $t \geq 0$ est tel que $\mathbb{P}(V_0 + U_1 + \dots + U_m = t) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ (ce qui est vrai en particulier si V_0 ou U_1 admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue), alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} R_{V_0, U_1^{h+}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} R_{V_0, U_1^h}(t) = R_{V_0, U_1}(t)$$

Le résultat suivant nous permet de calculer de façon récursive les bornes de la fonction de renouvellement $R_{V_0, U_1}(t)$ données par (4.2).

Proposition 4.2 *Sous les notations et hypothèses du théorème précédent, soient $t > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ fixés. On pose $h = \frac{t}{N}$ et*

$$\begin{aligned} \beta(k) &= \mathbb{P}(V_0 \leq kh) \\ \alpha^h(k) &= \mathbb{P}(U_1^h = kh) = \mathbb{P}(kh \leq U_1 < (k+1)h) \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq k \leq N$. On a alors $\alpha^h(0) = \mathbb{P}(U_1 < h) < 1$ pour h suffisamment petit et

$$\begin{aligned} R_{V_0, U_1^h}(kh) &= \frac{1}{1 - \alpha^h(0)} \left(\beta(k) + \mathbf{1}_{\{k \geq 1\}} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^h(k-j) R_{V_0, U_1^h}(jh) \right) \\ R_{V_0, U_1^{h+}}(kh) &= \beta(k) + \mathbf{1}_{\{k \geq 1\}} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^h(k-j-1) R_{V_0, U_1^h}(jh) \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq k \leq N$.

Pour chacune des trois quantités d'intérêt, après avoir défini et étudié les bornes comme nous venons de le voir pour une fonction de renouvellement, nous nous sommes ensuite attachés au choix du pas de temps h en vue de l'obtention d'une précision donnée : pour les quantités de type $\bar{F}_m(t)$ et $\bar{F}_q(t)$, nous obtenons une borne explicite sur h en fonction de la largeur d'encadrement visée ε , sous certaines conditions techniques. A titre d'exemple, nous avons ainsi le résultat suivant pour $\bar{F}_q(t)$:

Proposition 4.3 *Soit $q \in]0, 1[$ et soit $\varepsilon > 0$ fixé. Supposons que U_1 admette une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors, si*

$$h \leq \frac{2(1-q)\varepsilon}{q \times \|f\|_\infty}$$

on a alors :

$$\left| \bar{F}_q(t) - \bar{F}_q^h(t) \right| \leq \varepsilon$$

pour tout $t > 0$, où $\bar{F}_q^h(t)$ représente la valeur approchée fournie par le milieu des bornes de $\bar{F}_q(t)$, construites selon la méthode décrite précédemment.

Pour les fonctions de renouvellement, nous n'obtenons malheureusement pas de résultat aussi précis : nous observons que, dans le cas exponentiel où la fonction de renouvellement est connue explicitement, la précision relative des résultats obtenus est de l'ordre de $\frac{h}{2\mathbb{E}(U_1)}$, où U_1 désigne l'intervalle inter-arrivées. Dans le cas général, nous observons numériquement que cette même valeur, $\frac{h}{2\mathbb{E}(U_1)}$, semble être un ordre de grandeur de la précision relative maximale (i.e. la plus mauvaise).

Pour chacune des trois quantités d'intérêt, nous avons aussi testé numériquement la qualité des bornes obtenues, et ce de façons très diverses : nous avons tout d'abord considéré des v.a.r. U_i i.i.d. de même loi exponentielle, pour lesquelles des formules exactes sont disponibles. Pour $\bar{F}_m(t)$, nous avons aussi envisagé le cas de lois exponentielles avec des paramètres ayant des ordres de grandeur très différents, cas très fréquent en fiabilité, connu pour induire des problèmes numériques avec certaines méthodes (Lefebvre, 2003). Pour cette même quantité, nous avons aussi comparé nos résultats pour diverses lois classiques à ceux obtenus à l'aide d'un logiciel libre nommé APPL (Glen *et al.*, 2001), qui calcule entre autres des convolutions. Pour $\bar{F}_m(t)$ et pour les fonctions de renouvellement, nos résultats ont par ailleurs été comparés avec ceux obtenus par simulation de Monte-Carlo (MC), en particulier pour des lois complexes (voir aussi [CI11]). Pour les fonctions de renouvellement, une comparaison approfondie a été faite avec diverses méthodes existantes, et en particulier avec (Tortorella, 2005).

Pour les trois quantités d'intérêt, tous les tests effectués montrent la robustesse des résultats, quel que soit le type de lois utilisées, ainsi que le bon comportement des bornes, quelle que soit la précision désirée. En revanche, principalement pour les fonctions de renouvellement, un point faible est sans doute la difficulté à choisir h en fonction de la précision souhaitée, ce qui peut amener à devoir réitérer les calculs avec différentes valeurs de h jusqu'à ce que l'on obtienne la précision souhaitée.

4.3 Cas semi-markovien

[P11] Sophie Mercier (2008) Numerical bounds for semi-markovian quantities and application to reliability, *Methodology and Computing in Applied Probability*, Volume 10, Number 2, Jun. 2008, pp. 179-198, available online 3 Jul. 2007.

Nous nous intéressons maintenant à un système dont l'évolution dans le temps est décrite par un processus semi-markovien, à valeurs dans un espace d'état fini ou dénombrable. Pour un tel système, la plupart des quantités usuelles en fiabilité, qu'elles soient transitoires ou cumulées, sont solutions d'équations de renouvellement markovien, que l'on ne sait pas résoudre explicitement. Diverses méthodes numériques ont alors été proposées dans la

littérature : on peut par exemple consulter (Csenki, 2002), qui contient de très nombreuses références. La précision de ces méthodes n'est malheureusement généralement pas contrôlée, surtout dans un contexte industriel, soit parce qu'elle est inaccessible, soit parce qu'elle est trop coûteuse à calculer. Nous proposons ici un encadrement de telles quantités, solutions d'équations de renouvellement markovien.

Avant de construire un tel encadrement, nous précisons tout d'abord notre contexte d'étude, ainsi que quelques notations : nous considérons ici un processus semi-markovien (homogène) $(X_t)_{t \geq 0}$ à temps continu, à valeurs dans un espace E , fini ou dénombrable ; pour un tel processus, nous notons :

- $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite de ses instants de sauts, supposés tels que $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n = +\infty$ p.s. ;
- $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la chaîne de Markov associée, avec $Y_n = X_{T_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de matrice de transition $P = (P_{i,j})_{i,j \in E}$;
- $(q(i, j, dt))_{i,j \in E}$, le noyau semi-markovien associé, avec :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_{n+1} = j \cap T_{n+1} - T_n \leq t | Y_0 = i_0, T_1 = t_1, \dots \\ & \hspace{15em} Y_{n-1} = i_{n-1}, T_n = t_n, Y_n = i) \\ &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = j \cap T_{n+1} - T_n \leq t | Y_n = i) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 = j \cap T_1 \leq t | Y_0 = i) \\ &= \int_{[0,t]} q(i, j, du) \\ &= q(i, j, [0, t]) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \geq 0$, tous $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $t_1 \leq \dots \leq t_n$, tous $i, j \in E$, tous $i_0, \dots, i_{n-1} \in E$ tels que la probabilité conditionnelle existe ;

- $\rho(i, j, [0, t])$, la fonction de renouvellement markovien associée, avec :

$$\rho(i, j, [0, t]) = \mathbb{E}_i \left(\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} \mathbf{1}_{\{Y_n = j\}} \right)$$

pour tous $i, j \in E$, tout $t \geq 0$. Le réel $\rho(i, j, [0, t])$ représente le nombre moyen de visites à j sur $[0, t]$ pour le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ partant de i .

Soit maintenant \mathbb{B}_+ l'ensemble des fonctions $f : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uniformément bornées sur tout compact. Pour $f \in \mathbb{B}_+$, on note :

$$(dq * f)(i, t) = \sum_{j \in E} \int_{[0,t]} f(j, t - u) q(i, j, du) = \mathbb{E}_i (f(Y_1, t - T_1) \mathbf{1}_{\{T_1 \leq t\}})$$

et

$$\begin{aligned} (d\rho * f)(i, t) &= \sum_{j \in E} \int_{[0, t]} f(j, t - s) \rho(i, j, ds) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_i (f(Y_n, t - T_n) \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}) \end{aligned}$$

pour tout $(i, t) \in E \times \mathbb{R}_+$.

Une équation de renouvellement markovien (ERM) associée au noyau $(q(i, j, dt))_{i, j \in E}$ s'écrit alors :

$$f = g + dq * f \quad (4.3)$$

où $g \in \mathbb{B}_+$ est une fonction donnée, et f la fonction inconnue, cf (Cocozza-Thivent, 1997) ou (Iosifescu *et al.*, 2007) par exemple.

D'après (Çınlar, 1975), sous l'hypothèse $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n = +\infty$ p.s., on sait que, pour tout $g \in \mathbb{B}_+$, l'ERM (4.3) admet une unique solution $f_g \in \mathbb{B}_+$ donnée par :

$$f_g = d\rho * g < +\infty$$

Etant donné $g \in \mathbb{B}_+$, notre but est de construire un encadrement de la solution f_g de l'ERM (4.3). Pour cela, étant donné un réel $h > 0$ fixé, nous construisons deux nouveaux processus semi-markoviens $(X_t^h)_{t \geq 0}$ et $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$ approximant le processus initial $(X_t)_{t \geq 0}$, et encadrant ce processus en un certain sens : les deux nouveaux processus ont la même chaîne de Markov associée $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que $(X_t)_{t \geq 0}$, mais leurs intervalles inter-arrivées sont respectivement $(T_{n+1} - T_n)^h$ et $(T_{n+1} - T_n)^{h+}$, avec

$$\begin{aligned} (T_{n+1} - T_n)^h &= h \left\lfloor \frac{T_{n+1} - T_n}{h} \right\rfloor \\ &\leq T_{n+1} - T_n \\ &< (T_{n+1} - T_n)^{h+} = (T_{n+1} - T_n)^h + h \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf (4.1) pour la notation). Les états successivement visités par ces deux nouveaux processus sont donc les mêmes que pour le processus initial $(X_t)_{t \geq 0}$, mais les intervalles inter-arrivées sont un peu moins longs pour $(X_t^h)_{t \geq 0}$, et un peu plus longs pour $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$.

Avant de donner notre résultat principal, remarquons que les deux processus semi-markoviens $(X_t^h)_{t \geq 0}$ et $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$ ainsi construits sont discrets,

au sens où leurs noyaux ont un support inclus dans $h\mathbb{N}$. Ces noyaux sont donnés par

$$\begin{aligned} q^h(i, j, [0, t]) &= \mathbb{P}\left(Y_1 = j \cap T_1^h \leq t \mid Y_0 = i\right) \\ q^{h+}(i, j, [0, t]) &= \mathbb{P}\left(Y_1 = j \cap T_1^{h+} \leq t \mid Y_0 = i\right) \end{aligned}$$

pour tous $i, j \in E$ et tout $t \geq 0$, où $T_1^h = h \lfloor \frac{T_1}{h} \rfloor$ et $T_1^{h+} = T_1^h + h$. Ils sont aisément calculables en fonction de q .

Avec de telles notations, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.4 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus semi-markovien à valeurs dans E tel que $C = \sup_{\{(i,j):P(i,j) \neq 0\}} \mathbb{E}_i(\exp(-T_1) \mid Y_1 = j) < 1$. Pour tout $g \in \mathbb{B}_+$, on a :*

1. *Si $t \mapsto g(i, t)$ est croissante pour tout $i \in E$, alors, pour tout $0 < h < -\ln C$:*

$$f_g^{h+} = d\rho^{h+} * g \leq f_g = d\rho * g \leq f_g^h = d\rho^h * g < +\infty \quad (4.4)$$

où :

- ρ^h et ρ^{h+} désignent les fonctions de renouvellement markovien respectivement associées à $(X_t^h)_{t \geq 0}$ et $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$,
 - f_g^h et f_g^{h+} désignent les solutions respectives des ERM discrètes $f = g + dq^h * f$ et $f = g + dq^{h+} * f$.
2. *Si g est de la forme $g = g_1 - g_2$ avec $g_1, g_2 \in \mathbb{B}^+$ et que, pour $j = 1, 2$, la fonction $t \mapsto g_j(i, t)$ est croissante pour tout $i \in E$, alors, pour tout $0 < h < -\ln C$:*

$$f_{g_1}^{h+} - f_{g_2}^h \leq f_g = f_{g_1} - f_{g_2} \leq f_{g_1}^h - f_{g_2}^{h+} < +\infty \quad (4.5)$$

3. *Soit $t \geq 0$. Si g est uniformément continue sur $E \times [0, t]$, alors :*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f_g^h(i, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f_g^{h+}(i, t) = f_g(i, t)$$

La démonstration des deux premiers points est immédiate. En effet, notons $T_n^{(h)}$ (resp. $T_n^{(h+)}$) le n -ième instant de saut du processus $(X_t^h)_{t \geq 0}$ (resp. $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$). On a alors :

$$T_n^{(h)} = \sum_{i=0}^{n-1} (T_{i+1} - T_i)^h \leq T_n < T_n^{(h+)} = \sum_{i=0}^{n-1} (T_{i+1} - T_i)^{h+} = T_n^{(h)} + nh.$$

Si $t \mapsto g(i, t)$ est croissante pour tout $i \in E$, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i \left(g \left(Y_n, t - T_n^{(h+)} \right) \mathbf{1}_{\{T_n^{(h+)} \leq t\}} \right) &\leq \mathbb{E}_i \left(g \left(Y_n, t - T_n \right) \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E}_i \left(g \left(Y_n, t - T_n^{(h)} \right) \mathbf{1}_{\{T_n^{(h)} \leq t\}} \right) \end{aligned}$$

D'où le premier point, et le deuxième qui en découle immédiatement.

Le troisième point est un peu plus technique, ce qui est principalement dû au terme nh de $T_n^{(h+)}$, qu'il faut contrôler.

D'après les deux premiers points du théorème précédent, il suffit, pour obtenir un encadrement de f_g , de résoudre des équations de renouvellement discrètes associées à des noyaux semi-markoviens portés par $h\mathbb{N}$. Ceci se fait très facilement, de façon récursive. Le troisième point nous montre que l'encadrement obtenu peut être rendu aussi fin qu'on le souhaite, en prenant h suffisamment petit.

Notons que lorsque le noyau $(q(i, j, dt))_{i, j \in E}$ est triangulaire, on peut en fait donner des bornes améliorées pour certaines quantités fiabilistes, voir [P11] pour plus de détails.

Les bornes obtenues ont été testées sur quelques exemples numériques. En particulier, on a comparé les bornes données par (4.5) à celles obtenues dans (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004b) par une méthode de volumes finis explicite, pour un système formé de deux composants en redondance passive. L'état du système est décrit par un processus semi-markovien à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$ qui a pour noyau :

$$q(\cdot, \cdot, dt) = \begin{pmatrix} 0 & w_1(t) \bar{W}_2(t) & 0 & w_2(t) \bar{W}_1(t) \\ l(t) \bar{W}_3(t) & 0 & w_3(t) \bar{L}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dt$$

où $\bar{W}_i(t)$ et $\bar{L}(t)$ sont les fonctions de survies respectives associées à des lois de Weibull $W(\alpha_i, \beta_i)$ ($i = 1, 2, 3$) et log-normales $LN(m, \sigma)$ avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\simeq 9.59 \times 10^{-6}; \beta_1 = 1.5; \alpha_2 \simeq 7.85 \times 10^{-9}; \beta_2 = 2; \\ \alpha_3 &\simeq 1.09 \times 10^{-4}; \beta_3 = 1.2; m = 4.5; \sigma = 0.5 \end{aligned}$$

Les quantités d'intérêt sont les probabilités de transition $P_t(i, j) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$ pour $i, j \in E$. On pose $f_j(i, t) = P_t(i, j)$ et $g_j(i, t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbb{P}_i(T_1 > t)$ pour $i, j \in E$ et $t \geq 0$. On sait alors que :

$$f_j = g_j + dq * f_j,$$

cf (Çinlar, 1975) par exemple, et donc que $f_j = f_{g_j} = d\rho * g_j$. En remarquant que $g_j = I_j - u_j$ avec $I_j(i, t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$ et $u_j(i, t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbb{P}_i(T_1 \leq t)$, on

obtient $P_t(i, j) = f_{I_j}(i, t) - f_{u_j}(i, t)$, où $f_{I_j}(i, t) = \rho(i, j, [0, t])$. Comme I_j et u_j sont toutes les deux croissantes par rapport à t , on peut alors utiliser l'encadrement (4.5) qui s'écrit ici :

$$f_{I_j}^{h+} - f_{u_j}^h \leq f_{g_j} = f_{I_j} - f_{u_j} \leq f_{I_j}^h - f_{u_j}^{h+} \quad (4.6)$$

Les valeurs des bornes obtenues pour $P_t(1, j)$ et $j = 1, \dots, 4$ sont tracées sur la figure 4.1, ainsi que les résultats de (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004b) et les valeurs asymptotiques, que l'on connaît de façon exacte. Pour t pas trop grand, les deux méthodes sont parfaitement cohérentes. Une étude plus approfondie (voir [P 11]) montre cependant que, pour t grand, nos résultats semblent plus en concordance avec les résultats asymptotiques que ceux de (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004b). Si ces derniers résultats peuvent bien sûr être améliorés en diminuant les pas de discrétisation et sans doute aussi en choisissant un schéma de type implicite au lieu d'explicite, ceci montre malgré tout que, sans le contrôle de la précision dont nous disposons ici, un choix inapproprié de pas de discrétisation peut conduire à des résultats plus ou moins erronés (ici légèrement erronés pour t grand).

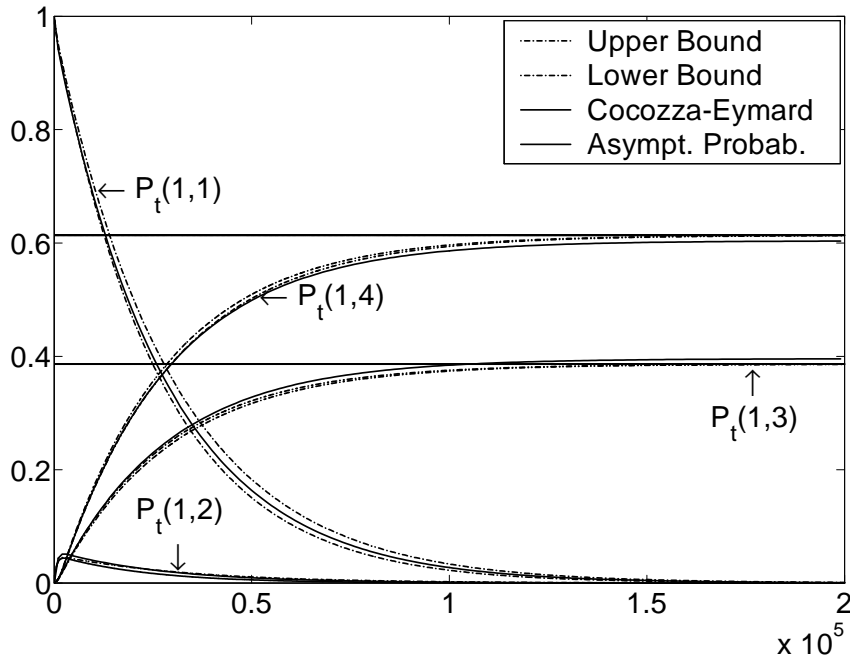


FIG. 4.1 – Comparaison des $P_t(1, j)$ pour $j = 1, 2, 3, 4$ par (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004b) et par la méthode d'encadrement

Notons aussi que, dans (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004b), le noyau semi-markovien est supposé à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ici, comme dans le paragraphe précédent (§4.2), la méthode utilisée n'est pas sensible au type de mesures intervenant dans le noyau et des mélanges de mesures à densité et de mesures discrètes, qui apparaissent dès que l'on a une probabilité de refus de démarrage d'un composant par exemple, ne posent aucun problème.

Notons finalement que pour obtenir un encadrement des probabilités de transition $P_t(i, j)$, nous avons dû utiliser (4.5) qui est clairement moins précis que (4.4), puisqu'il correspond à des différences d'inégalités de type (4.4). Beaucoup de quantités fiabilistes associées à un processus semi-markovien peuvent cependant être directement encadrées à l'aide de (4.4), comme la disponibilité cumulée sur $[0, t]$ ou plus généralement, la durée moyenne passée par $(X_t)_{\geq 0}$ sur une partie de E entre les instants 0 et t , le nombre moyen de sauts de $(X_t)_{\geq 0}$ d'une partie de E vers une autre partie de E (le nombre de pannes par exemple), le coût moyen d'utilisation du système sur $[0, t]$, ... Les bornes obtenues pour toutes ces quantités seront donc plus précises que pour les probabilités de transition (cf [P11] pour un exemple).

4.4 Cas markovien

[P12] Sophie Mercier (2008) Bounds and approximations for continuous-time markovian transition probabilities and large systems, *European Journal of Operational Research*, Volume 185, Issue 1, Feb. 2008, pp. 216-234, available online 30 January 2007.

Nous nous intéressons maintenant au cas de systèmes markoviens, à valeurs dans un espace d'état fini mais éventuellement très grand. Contrairement au cas semi-markovien, nous disposons ici de formules exactes pour la plupart des quantités usuelles en fiabilité. Cependant, ces formules sont généralement exprimées sous forme matricielle, faisant très souvent intervenir des exponentielles de matrices. Lorsque les systèmes sont de petite taille ou du moins de taille raisonnable, il est alors facile de les calculer numériquement. Lorsque les systèmes sont plus gros, les tailles des matrices impliquées grossissent exponentiellement avec le nombre de composants et les calculs numériques deviennent rapidement soit beaucoup trop gourmands en temps de calculs, soit impossibles à réaliser si l'on ne prend garde à la méthode utilisée. Ce problème majeur pour les industriels a été à l'origine de très nombreux travaux : on peut par exemple consulter le livre de W. J. Stewart (1994), les articles de références de C. B. Moler et C. F. Van Loan (1978, 2003 avec 161 citations), ou encore (Reibman *et al.*, 1989) ou (Sidje et Stewart, 1999), pour n'en citer que quelques-uns. Il ne s'agit pas de faire ici un quelconque panorama des différentes méthodes existantes, mais juste d'apporter notre contribution en proposant de nouveaux algorithmes très simples à implémenter, permettant de calculer des bornes numériques

pour les indicateurs usuels de la fiabilité (à horizon fini). Les résultats numériques obtenus sont comparés à ceux donnés par d'autres méthodes, choisies pour leur proximité avec la nôtre, d'un point de vue méthodologique.

Les définitions et notations utilisées dans ce paragraphe sont similaires à celles employées dans le paragraphe précédent, mises à part quelques-unes, spécifiques au cadre markovien : étant donné un processus markovien $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans un espace d'état fini E , on note $a_{i,j}$ le taux de transition de i vers j pour tous $i, j \in E$ tels que $i \neq j$, et $b_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}$ pour tout $i \in E$. La matrice génératrice associée à $(X_t)_{t \geq 0}$ est alors $A = (A(i, j))_{i, j \in E}$ avec

$$A(i, j) = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ -b_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

La matrice de transition de la chaîne de Markov sous-jacente est $P = (P_{i,j})_{i, j \in E}$ avec

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{a_{i,j}}{b_i} & \text{si } b_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

pour $i \neq j$ et $P_{i,i} = 0$.

Le noyau semi-markovien associé à $(X_t)_{t \geq 0}$ est

$$q(i, j, dt) = a_{i,j} e^{-b_i t} dt$$

pour $i, j \in E$.

Pour $h > 0$, les lois inter-arrivées des processus approximant $(X_t^h)_{t \geq 0}$ et $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$ sont ici les lois géométriques ("lower" et "upper") qui encadrent classiquement une loi exponentielle, respectivement à valeurs dans \mathbb{N} et \mathbb{N}^* , et on a :

$$\begin{aligned} q^h(i, j, kh) &= \mathbb{P}_i(kh < T_1 \leq (k+1)h, X_{T_1} = j) \\ &= P_{i,j} e^{-b_i kh} (1 - e^{-b_i h}) \\ q^{h+}(i, j, kh) &= \mathbf{1}_{\{k \geq 1\}} q^h(i, j, (k-1)h) \\ &= \mathbf{1}_{\{k \geq 1\}} P_{i,j} e^{-(k-1)b_i h} (1 - e^{-b_i h}) \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Dans ce cadre, le théorème 4.4 peut être appliqué et fournit des bornes pour toutes les quantités solutions d'équations de renouvellement, c'est-à-dire de la forme f_g , où $g \in \mathbb{B}_+$. Les solutions des ERM discrètes f_g^h et f_g^{h+} sont des approximations de f_g , que l'on appelle ici LGA et UGA, pour Lower et Upper Geometric Approximation. Le calcul de f_g^h et f_g^{h+} peut se faire à l'aide des algorithmes développés dans le cadre semi-markovien (voir [P11]). Il est en fait préférable d'utiliser ici la proposition suivante, qui fournit des algorithmes simplifiés.

Proposition 4.5 Soient $g \in \mathbb{B}_+$ et $h > 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :
 $f_g^h(\cdot, Nh) = (f_g^h(i, Nh))_{i \in E}$ en colonne, de même pour $g(\cdot, Nh)$ et $f_g^{h+}(\cdot, Nh)$.
 Soit I la matrice identité de taille $\text{card}(E)$ et

$$\begin{aligned} D_h &= \text{diag} \left(e^{-b_i h}, i = 1..m \right) \\ C_h &= D_h + (I - D_h) P \\ B_h &= I - (C_h - D_h) = I - (I - D_h) P \end{aligned}$$

où $\text{diag}(u_1, \dots, u_m)$ représente la matrice diagonale ayant pour termes diagonaux u_1, \dots, u_m (pour tous $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}$).

La matrice B_h est alors inversible et

$$\begin{aligned} f_g^h(\cdot, 0) &= B_h^{-1} g(\cdot, 0) \\ f_g^{h+}(\cdot, 0) &= g(\cdot, 0) \end{aligned}$$

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_g^h(\cdot, (N+1)h) &= B_h^{-1} \left[g(\cdot, (N+1)h) + D_h \left(f_g^h(\cdot, Nh) - g(\cdot, Nh) \right) \right] \\ f_g^{h+}(\cdot, (N+1)h) &= C_h f_g^{h+}(\cdot, Nh) - D_h g(\cdot, Nh) + g(\cdot, (N+1)h) \end{aligned}$$

Le calcul de $f_g^h(\cdot, Nh)$ et de $f_g^{h+}(\cdot, Nh)$ est très facile récursivement à partir de la proposition 4.5. De plus, l'algorithme induit ne nécessite pas de produit matriciel mais seulement des produits matrice par un vecteur, ce qui est important lorsque E est de grande taille, cf (Rauzy, 2004) e.g.. De la même façon, on n'a pas non plus besoin de calculer B_h^{-1} mais seulement des quantités de la forme $B_h^{-1}v$, où v est un vecteur colonne. Ceci est équivalent à résoudre des systèmes linéaires de la forme $B_h w = v$. Pour accélérer la résolution numérique de tels systèmes, on factorise B_h une fois pour toute sous la forme $B_h = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure (éventuellement à une permutation près, cf (Ciarlet, 1989) e.g.). Calculer $B_h^{-1}v$ revient alors à la résolution successive des deux systèmes triangulaires $v = Lz$ et $z = Uw$, ou encore $B_h^{-1}v = U \setminus (L \setminus v)$ dans les notations de Matlab. Le conditionnement de ces systèmes est étudié dans [P12] où l'on montre qu'ils sont d'autant mieux conditionnés que $h(\max_{i \in E} b_i - \min_{i \in E} b_i)$ est petit.

En pratique, on peut remarquer que $g(\cdot, (N+1)h) - D_h \times g(\cdot, Nh)$ est souvent indépendant de N (cf [P12] et [CI15]). Dans ce cas, les résultats de la Proposition 4.5 se simplifient et on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.6 Avec les notations et hypothèses de la Proposition 4.5, si $g(\cdot, (N+1)h) = D_h \times g(\cdot, Nh)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned} f_g^h(\cdot, (N+1)h) &= B_h^{-1} D_h f_g^h(\cdot, Nh) \\ f_g^{h+}(\cdot, (N+1)h) &= C_h f_g^{h+}(\cdot, Nh) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} f_g^h(\cdot, Nh) &= (B_h^{-1} D_h)^N B_h^{-1} \times g(\cdot, 0) \\ f_g^{h+}(\cdot, Nh) &= C_h^N \times g(\cdot, 0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$.

La Proposition 4.5 et le Corollaire 4.6 permettent de calculer des bornes pour une fonction f_g , solution d'une ERM. D'autres bornes sont proposées dans [P12] dans le cas particulier où $E = \{1, \dots, m\}$, $g(i, t) = v(i) e^{-b_i t}$ avec v croissante, et la matrice génératrice A est triangulaire supérieure. Ceci permet par exemple d'avoir des bornes améliorées pour des quantités du type $\mathbb{P}_i(X_t \geq j)$, dans le cas d'un système ne pouvant que se dégrader.

Dans [CI15], plusieurs exemples numériques sont proposés, qui montrent le bon comportement des différentes bornes et ce, pour divers types de quantités fiabilistes.

Dans [P12], nous nous sommes plus particulièrement attachés à l'évaluation du semi-groupe de transition $P_t(i, j)$, où $P_t(i, j) = f_{g_j}(i, t)$ avec $g_j(i, t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}} e^{-b_i t}$.

En premier lieu, nous avons testé numériquement le bon comportement des bornes, données par (4.6). Ces tests ont été faits en comparant nos résultats avec ceux obtenus à l'aide de la fonction EXPM1 de Matlab, qui donne une référence pour calculer $P_t(i, j) = e^{tA}(i, j)$. La fonction EXPM1 est basée sur la méthode 3 de (Moler et Van Loan, 1978, 2003) et est connue pour donner de très bons résultats. Elle nécessite en revanche de nombreux produits matriciels et n'est pas adaptée lorsque E est grand. Elle s'est effectivement révélée lente comparée à nos méthodes lorsque E est grand. Les résultats obtenus sont cependant tout-à-fait cohérents.

En second lieu, nous avons comparé les approximations fournies par le milieu des bornes (MB), par $f_{g_j}^h$ (LGA) et par $f_{g_j}^{h+}$ (UGA). En termes de temps de calcul et de résultats, il semble que UGA soit généralement la plus performante. C'est donc celle qu'il faut retenir lorsque l'on n'a besoin que d'une valeur approchée de $P_t(i, j)$. Un autre intérêt de UGA est qu'elle peut facilement s'interpréter à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 (d.l.1) du semi-groupe $(P_t(i, j))_{i, j \in E}$. En effet, (4.7) donne, pour $g_j(i, t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}} e^{-b_i t}$:

$$f_{g_j}^{h+}(\cdot, Nh) = C_h^N g_j(\cdot, 0) = C_h^N(\cdot, j) \quad (4.8)$$

En prenant $t = Nh$ et en utilisant le fait que :

$$P_t(\cdot, j) = e^{NhA}(\cdot, j) = \left(e^{hA}\right)^N(\cdot, j),$$

UGA revient donc à approximer e^{hA} par $C_h = D_h + (I - D_h)P$.

Or, pour le processus de Markov de sauts $(X_t)_{t \geq 0}$, on sait que, quand h tend vers 0^+ :

$$\begin{aligned} e^{hA}(i, i) &= \mathbb{P}_i(T_1 > h) + o(h) \\ &= e^{-b_i h} + o(h) \\ &= C_h(i, i) + o(h) \end{aligned}$$

et, pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} e^{hA}(i, j) &= \mathbb{P}_i(T_1 \leq h; X_{T_1} = j) + o(h) \\ &= \mathbb{P}_i(T_1 \leq h) P_{i,j} + o(h) \\ &= \left(1 - e^{-b_i h}\right) P_{i,j} + o(h) \\ &= C_h(i, j) + o(h) \end{aligned}$$

de sorte que

$$e^{hA} = C_h + o(h). \quad (4.9)$$

En remarquant que $C_h = I + hA + o(h)$, UGA se révèle alors très proche de la méthode d'Euler explicite (Forward Euler's Approximation : FEA), dans laquelle on approche e^{hA} par $I + hA$, cf (Rauzy, 2004) e.g.. Cependant, FEA nécessite $h \leq \frac{1}{\max(b_i)}$ pour converger (car $I + hA$ doit être positive) alors que aucune condition n'est imposée pour UGA. De plus, $I + hA$ est une approximation de e^{hA} et, du fait de l'interprétation donnée par (4.9), on peut s'attendre à ce que UGA soit meilleure que FEA.

Deux autres méthodes très proches de FEA et UGA peuvent aussi être trouvées dans la littérature :

- l'uniformisation (External Uniformization Approximation : EUA, cf (Kijima, 1997) ou (Ross, 2000) e.g.) où :

$$e^{hA} \sim (I - hA)^{-1}$$

quand $h \rightarrow 0^+$, qui nécessite $h < \frac{1}{\rho(A)} \leq \frac{1}{2 \min b_i}$ où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A ,

- l'algorithme donné pour des processus semi-markoviens dans (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004a), qui donne, dans le cas markovien :

$$e^{hA}(i, j) \sim \begin{cases} \frac{1}{1+b_i h} & \text{if } i = j \\ \frac{a_{i,j} h}{1+b_i h} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

quand $h \rightarrow 0^+$, sans condition pour h (méthode CEA pour Cocozza-Eymard's Approximation).

Nous avons alors comparé les résultats donnés par UGA, FEA, EUA et CEA, sur un benchmark décrit dans [P12] (ainsi que sur d'autres), pour différentes valeurs des paramètres. Les conclusions sont que UGA semble meilleure que CEA (résultats plus précis pour des temps de calculs similaires). En ce qui concerne UGA, FEA et EUA (avec le même h), les temps de calculs sont similaires pour UGA et FEA, avec FEA légèrement plus rapide. EUA est un peu plus lente (de 2 à 10 fois dans nos essais). Pour les performances, UGA semble généralement meilleure, en particulier pour t pas trop grand. Pour t grand, on a cependant observé quelques exceptions, où FEA et/ou EUA sont parfois légèrement meilleures.

En conclusion de ce paragraphe, les méthodes développées pour un système semi-markovien (§4.3) permettent d'obtenir des bornes simplifiées dans le cadre markovien. Les bornes obtenues sont aisément calculables, même pour un gros système markovien, car elles n'impliquent que des produits matrice \times vecteur mais pas de produits matriciels. Les méthodes fournissent aussi des approximations, comme pour le semi-groupe de transition, que nous avons plus particulièrement étudié. Les approximations obtenues s'avèrent très proches de méthodes connues, auxquelles nous les avons comparées, et ce généralement à l'avantage de la méthode présentée ici.

4.5 Conclusion - Perspectives

Nous avons présenté ici des encadrements pour diverses quantités fiabilistes, la plupart solutions d'équations de renouvellement ou de renouvellement markovien. Les bornes ont été testées sous divers aspects, et les résultats obtenus sont tout-à-fait encourageants. Plus précisément, l'efficacité des algorithmes proposés est manifeste pour une échelle de temps pas trop grande, les temps de calculs pouvant sans doute devenir un peu lourds pour de grandes valeurs de t , lorsque l'on se rapproche du régime stationnaire. Ceci n'est sans doute que peu pénalisant car, lorsque t est grand, nous disposons de développements asymptotiques très performants, que ce soit pour les fonctions de renouvellement, ou pour les solutions d'équations de renouvellement markovien, voir (Çinlar, 1975) par exemple. On peut donc imaginer, comme le suggèrent certains papiers pour les fonctions de renouvellement, cf (From, 2001) ou (Garg et Kalagnanam, 1998), utiliser les méthodes proposées ici pour t pas trop grand, puis utiliser un développement asymptotique au-delà (switch-over point method). Une étude reste cependant à faire pour étudier le choix du point de séparation et la méthode de raccordement.

Les méthodes proposées dans le paragraphe 4.1 reposent foncièrement sur les équations de renouvellement markovien vérifiées par les quantités fiabilistes d'intérêt, liées à un processus semi-markovien à valeurs dans un espace d'état dénombrable. Dans le prochain chapitre, nous présenterons les

PDMP (Piecewise Deterministic Markov Process), qui sont en fait des processus de renouvellement markovien à valeur dans un espace d'état général. On pourrait donc imaginer généraliser les résultats obtenus ici pour ce type de processus, ou tout au moins pour certains PDMP de forme particulière.

Chapitre 5

Méthodes de volumes finis en fiabilité dynamique

Mots clefs : Processus de Markov à valeurs dans un espace général, Equations de Chapman-Kolmogorov, Processus de Markov déterministe par morceaux, Méthodes de volumes finis explicite et implicite, Inégalités BV-faibles et de Sobolev, Tension.

5.1 Introduction

Lorsque l'on modélise l'évolution d'un système par un processus de Markov de saut à valeurs dans un espace d'états fini, cela signifie que les taux de transition entre les différents états (taux de panne ou de réparation par exemple) sont supposés constants et indépendants de l'environnement (température, pression, ...). L'influence du contexte environnemental ne peut cependant pas toujours être négligée. Ainsi, une très forte température peut par exemple induire un taux de panne accru pour un composant électronique. De la même façon, l'état d'un système peut aussi influencer sur l'évolution du contexte environnemental. Il suffit par exemple de penser à une unité de chauffage, dont la mise en route fait augmenter la température environnante. Ces observations ont conduit au développement de nouveaux modèles, qui prennent en compte de telles interactions. Ce type de modélisation appartient à ce que l'on appelle désormais la fiabilité dynamique, selon le vocabulaire de Jacques Devooght, qui l'a introduite dans les années 90, au départ pour des problèmes issus du domaine de la sûreté nucléaire, cf (Devooght, 1997) et ses références. Dans le vocabulaire probabiliste, ces modèles correspondent à des processus de Markov déterministes par morceaux (PDMP : Piecewise Deterministic Markov Process), conçus et étudiés par (Davis, 1984, 1993).

L'intérêt majeur des PDMP est leur grande flexibilité au niveau modélisation, qui permet de décrire l'évolution de systèmes complexes. A titre d'exemple, un système cohérent formé de sous-systèmes semi-markoviens

indépendants correspond à un cas très particulier de PDMP, où les durées passées par chaque sous-système dans son état courant forment le contexte environnemental (cf la fin du paragraphe 2.4). Cette puissance de modélisation s'accompagne malheureusement d'une complexité qui engendre souvent de grandes difficultés pour évaluer les quantités fiabilistes associées. Ces quantités ne sont généralement pas atteignables analytiquement, et sont, la plupart du temps, évaluées par simulation de Monte-Carlo (Marseguerra *et al.*, 1998), qui induisent souvent de longs temps de calcul. Nous proposons ici de nouvelles méthodes numériques pour leur évaluation, basées sur des schémas de type volumes finis. Plus précisément, les quantités d'intérêt s'exprimant à l'aide des lois marginales d'un PDMP, nous nous attachons ici à leur évaluation.

Nous commençons par préciser notre modèle pour les PDMP, qui diffère légèrement de celui de Davis, ainsi que nos notations (§5.2). Comme leur nom l'indique, les PDMP sont des processus markoviens (à valeurs dans un espace non dénombrable), pour lesquels on peut écrire les équations de Chapman-Kolmogorov (CK). Nous montrons tout d'abord (§5.3) que ces équations caractérisent les lois marginales d'un PDMP, au sens où ce sont les seules solutions des équations CK, dans un sens faible que nous précisons plus loin. Ceci nous permet de proposer et étudier un premier algorithme (§5.4), de type volumes finis explicite, pour approcher ces lois marginales. Cet algorithme se révèle performant, mais montre malgré tout quelques imprécisions lorsque l'on se rapproche du régime stationnaire. Ceci nous a amené à développer d'autres algorithmes, toujours de type volumes finis, mais cette fois-ci implicites. Un premier algorithme de type volumes finis implicite a été proposé et testé sur un exemple issu de l'industrie pétrolière, qui est présenté au prochain chapitre. Les résultats s'avérant cette fois-ci satisfaisants, nous nous sommes alors attachés à montrer la convergence de cet algorithme. Pour ce faire, nous nous sommes aperçus que nous devions le modifier quelque peu, et en particulier introduire un terme de viscosité, qui induit de la diffusion. Ce nouvel algorithme, toujours de type volumes finis implicite, est présenté et étudié dans le paragraphe 5.5. Enfin, nous concluons et donnons quelques perspectives dans le dernier paragraphe (§5.6).

5.2 Le cadre d'étude

Nous précisons ici diverses notations et hypothèses, que nous utilisons dans toute la suite de ce mémoire : un PDMP est ici un processus à deux composantes, que nous notons $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$. C'est un processus hybride, au sens où les deux composantes ne sont pas du même type : la première est discrète, à valeurs dans un espace d'états fini E . Typiquement, elle indique les états respectifs (up/down, on/off) des différents composants du système, exac-

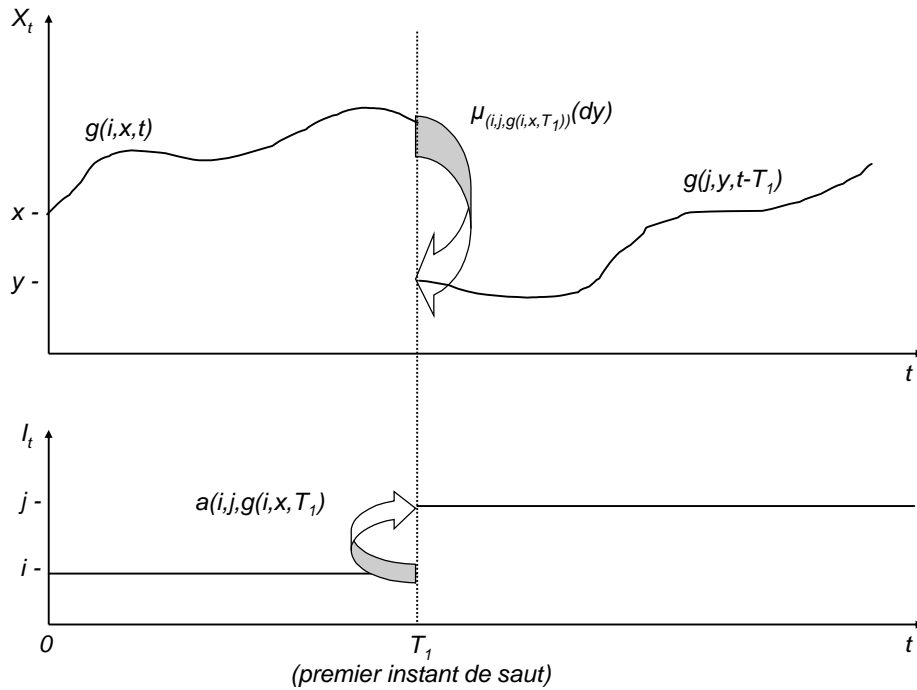


FIG. 5.1 – Schéma d'évolution d'un PDMP

tement comme pour un processus de Markov de sauts usuel. La deuxième composante, X_t , prend ses valeurs dans \mathbb{R}^d et représente les conditions environnementales (température, pression, ...). Le processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ saute à des instants isolés et les deux composantes interagissent mutuellement l'une sur l'autre : le taux de transition entre deux états discrets $i, j \in E$ dépend de la composante environnementale X_t et est une fonction $a(i, j, X_t)$; lors d'un saut de la variable discrète de $I_{t-} = i$ à $I_t = j$ à l'instant t , la seconde composante saute simultanément et est distribuée selon une loi $\mu_{(i, j, X_{t-})}(dy)$, qui dépend de la valeur de la deuxième composante juste avant le saut (X_{t-}), mais aussi des états discrets i et j ; entre deux sauts, la composante discrète I_t est constante, et l'évolution de X_t est déterministe, solution d'une équation différentielle qui dépend de cet état discret (fixe) : sachant que $I_t = i$, la composante X_t est solution de :

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{v}(i, y), \quad (5.1)$$

où \mathbf{v} est une fonction donnée, $\mathbf{v} : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Sous des conditions techniques assurant son existence et unicité (voir ci-dessous), on note $g(i, x, t)$ l'unique solution de (5.1) définie pour $t \in \mathbb{R}$ telle que $g(i, x, 0) = x$, pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$.

L'évolution d'un PDMP est schématisée dans la figure 5.1, ci-dessus.

Nous considérons ici qu'un PDMP prend ses valeurs dans $E \times \mathbb{R}^d$. Dans les applications, l'espace d'état est souvent de la forme $\prod_{i \in E} \{i\} \times V_i$, où les V_i sont des boréliens de \mathbb{R}^d . Les résultats donnés ici s'étendent aisément à ce cadre, et sont utilisés dans les applications sur un espace de cette forme sans notification supplémentaire.

Le modèle que nous considérons est en revanche un peu moins général que celui de (Davis, 1993), qui admet quant à lui, la possibilité de sauts lorsque la composante environnementale atteint la frontière de l'espace. Dans notre travail, ces éventuels sauts ne sont pas envisagés.

Pour tous les PDMP considérés ici, nous nous plaçons sous les hypothèses suivantes (\mathcal{H}_1) :

- ρ_0 est une mesure de probabilités sur $E \times \mathbb{R}^d$.
- La fonction de taux $a : E \times E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et bornée.
- La famille de lois de probabilités $(\mu_{(i,j,x)})_{(i,j,x) \in E^2 \times \mathbb{R}^d}$ qui contrôle les redémarrages de $(X_t)_{t \geq 0}$ lors des sauts de $(I_t)_{t \geq 0}$ est telle que, pour tous $i, j \in E$ et $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, la fonction $x \mapsto \int \psi(y) \mu_{(i,j,x)}(dy)$, est continue (bornée) sur \mathbb{R}^d .
- La vitesse $\mathbf{v} : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, qui apparaît dans (5.1), est continue et telle que :
 - $\mathbf{v}(i, \cdot)$ est localement Lipschitz continue (pour tout $i \in E$),
 - la fonction $\text{div } \mathbf{v}(i, \cdot)$ est p.s. bornée (pour tout $i \in E$),
 - la fonction $\mathbf{v}(i, \cdot)$ est sous-linéaire : il existe $V_1 > 0$ et $V_2 > 0$ telles que

$$\forall i \in E, \forall x \in \mathbb{R}^d, \|\mathbf{v}(i, x)\| \leq V_1 \|x\| + V_2.$$

Sous ces hypothèses, l'existence et l'unicité de $g(i, x, t)$ sur \mathbb{R} est alors assurée.

Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 , le processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov homogène, cf (Davis, 1993). On note $P_t(i, x, j, dy)$ le semi-groupe de transition associé, avec

$$P_t f(i, x) = \mathbb{E}_{(i,x)}(f(I_t, X_t)) = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(j, y) P_t(i, x, j, dy)$$

pour tout $(i, x, t) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ et toute application f mesurable positive ou bornée. On note aussi ρ_0 la loi initiale du processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ et ρ_t sa

loi marginale à l'instant t , avec

$$\rho_t f(i, x) = \mathbb{E}_{\rho_0}(f(I_t, X_t)) = \rho_0 P_t f(i, x) = \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} P_t f(i, x) \rho_0(i, dx) \quad (5.2)$$

pour tout $(i, x, t) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ et toute application f mesurable positive ou bornée.

5.3 Caractérisation des lois marginales

[P7] Christiane Coccozza-Thivent, Robert Eymard, Sophie Mercier, Michel Roussignol (2006) Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, Volume 2006, Article ID 92156, pp. 1-18.

Les quantités fiabilistes auxquelles nous nous intéressons se mettent sous la forme $\mathbb{E}_{\rho_0}(f(I_t, X_t))$ ou $\int_0^t \mathbb{E}_{\rho_0}(f(I_s, X_s)) ds$ et s'expriment donc aisément à l'aide des lois marginales ρ_t du PDMP sous-jacent, cf (5.2). La première étape de notre travail consiste ici à essayer de caractériser ces lois marginales. Pour ce faire, nous utilisons le caractère markovien d'un PDMP, qui nous permet d'écrire les équations de Chapman-Kolmogorov (CK) associées, aussi appelées équations de Dynkin. L'objet de [P7] est de montrer que la famille de lois marginales $(\rho_t(i, dx))_{t \geq 0}$ est la seule solution de ces équations, dans un sens faible que nous précisons ci-dessous.

Afin d'écrire les équations de Chapman-Kolmogorov, nous avons besoin du générateur de $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$. Pour cela, nous introduisons le domaine $D_0 = \{h : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C_1 \text{ et bornée telle que } \mathbf{v}(i, \cdot) \cdot \nabla h(i, \cdot) \text{ est continue bornée pour tout } i \in E\}$ où

$$\mathbf{v}(i, \cdot) \cdot \nabla h(i, \cdot) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial h}{\partial x_k}(i, \cdot) \mathbf{v}^{(k)}(i, \cdot)$$

et $\mathbf{v}(i, \cdot) = (\mathbf{v}^{(1)}(i, \cdot), \mathbf{v}^{(2)}(i, \cdot), \dots, \mathbf{v}^{(d)}(i, \cdot))$.

Avec cette notation, nous montrons dans [P7] le résultat suivant, qui se trouve déjà dans (Davis, 1993), où il est obtenu avec des méthodes différentes des nôtres.

Proposition 5.1 *Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 , si $f \in D_0$, alors f appartient au domaine du générateur infinitésimal H_0 de $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ et donc au domaine*

du générateur étendu. De plus, pour $f \in D_0$, on a :

$$\begin{aligned} H_0 f(i, x) &= \sum_{j \in E} a(i, j, x) \int_{\mathbb{R}^d} (f(j, y) - f(i, x)) \mu_{(i, j, x)}(dy) + \mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla f(i, x) \\ &= \sum_{j \in E} a(i, j, x) \int_{\mathbb{R}^d} f(j, y) \mu_{(i, j, x)}(dy) - b(i, x) f(i, x) \\ &\quad + \mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla f(i, x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

où l'on pose $\mu_{(i, i, x)}(dy) = \delta_x(dy)$ pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$ et $b(i, x) = \sum_{j \in E} a(i, j, x)$ pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$.

Les équations de Chapman-Kolmogorov (ou de Dynkin) s'écrivent :

$$\rho_t f(i, x) - \rho_0 f(i, x) = \int_0^t \rho_s H_0 f(i, x) \, ds$$

pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$ et toute fonction $f \in D_0$.

En utilisant la forme du générateur (5.3) et en posant $\mathbf{P}(t)(\cdot, dx) = \rho_t(\cdot, dx)$ pour tout $t \geq 0$, ces équations apparaissent comme des équations différentielles partielles qui s'écrivent sous la forme faible suivante :

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(i, x) \mathbf{P}(t)(i, dx) - \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(i, x) \rho_0(i, dx) \\ &= \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\sum_{j \in E} a(i, j, x) \int_{\mathbb{R}^d} f(j, y) \mu_{(i, j, x)}(dy) \right. \\ &\quad \left. - b(i, x) f(i, x) + \mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla f(i, x) \right] \mathbf{P}(s)(i, dx) \, ds \end{aligned} \quad (5.4)$$

pour toute $f \in D_0$.

Dans le second membre, le terme en $\mu_{(i, j, x)}(dy)$ correspond à la redistribution de la masse de probabilité lors d'un saut du PDMP. Le terme en $\mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla f(i, x)$, correspond à l'évolution des masses de probabilité le long des trajectoires, entre les sauts (terme de transport) et $b(i, x)$ est le taux de sortie de l'état (i, x) . Les équations de Chapman-Kolmogorov apparaissent alors comme des équations de bilan en terme de flux de masses de probabilités.

Ces équations étant établies, notre problème est maintenant de montrer que $\mathbf{P}(t)(\cdot, dx) = \rho_t(\cdot, dx)$ en est la seule solution. Plus précisément, soit $\mathcal{P}(E \times \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur $E \times \mathbb{R}^d$. Notre but est de montrer que $\mathbf{P}(t)(\cdot, dx) = \rho_t(\cdot, dx)$ est l'unique application $\mathbf{P} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}(E \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifie (5.4) pour toute $f \in D_0$. En d'autres termes, si $\tilde{\mathbf{P}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}(E \times \mathbb{R}^d)$ désigne la différence de deux solutions, le problème est

maintenant de montrer que $\sum_{i \in E} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \varphi(i, x, s) \tilde{\mathbf{P}}(s)(i, dx) ds = 0$ pour suffisamment de fonctions $\varphi : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

Pour cela, nous commençons par étendre (classiquement) (5.4) à des fonctions dépendantes du temps :

Proposition 5.2 *Si $\mathbf{P} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}(E \times \mathbb{R}^d)$ vérifie (5.4) pour toute $f \in D_0$, la mesure $m(i, dx, ds) = \mathbf{P}(s)(i, dx) ds$ vérifie alors :*

$$m(E \times \mathbb{R}^d \times [0, T]) < \infty, \forall T \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y, s) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x, s) \right) m(i, dx, ds) \\ & + \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(i, x, s) + \mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x, s)) m(i, dx, ds) \\ & + \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x, 0) \rho_0(i, dx) \\ & = 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

pour toute $\varphi : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et à support compact ($\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)^E$).

Soit $\tilde{m}(i, dx, ds) = \tilde{\mathbf{P}}(s)(i, dx) ds$, où l'on rappelle que $\tilde{\mathbf{P}}(s)$ représente la différence de deux solutions du problème initial. D'après (5.5), nous savons maintenant que

$$\sum_{i \in E} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(i, x, s) \tilde{m}(i, dx, ds) = 0 \tag{5.6}$$

pour toute fonction ψ de la forme

$$\begin{aligned} \psi(i, x, s) &= \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y, s) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x, s) \right) \\ &+ \partial_t \varphi(i, x, s) + \mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x, s) \end{aligned}$$

où $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)^E$.

Pour pouvoir conclure que \tilde{m} est nulle, il nous faut étendre le domaine des fonctions ψ , ou, de façon équivalente, étendre le domaine des fonctions φ . Pour cela, nous avons besoin de quelques notations :

Définition 5.3 *Etant donnée $\varphi : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, on définit la fonction $\tilde{\varphi} : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, également continue bornée, par*

$$\tilde{\varphi}(i, x, t) = \varphi(i, g(i, x, t), t)$$

pour tout $(i, x, t) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. On note alors $C_b(d, E, \mathbf{v})$ l'ensemble des fonctions $\varphi : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues bornées telles que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^1 en t , avec $\partial_t \tilde{\varphi}$ continue bornée.

Remarquons que, si φ est de classe C^1 et bornée, il en est alors de même pour $\tilde{\varphi}$ avec

$$\partial_t \tilde{\varphi}(i, g(i, x, -s), s) = \partial_t \varphi(i, x, s) + \mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x, s)$$

pour tout $(i, x, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Ceci nous amène à la notation suivante : pour $\varphi \in C_b(d, E, \mathbf{v})$, on note $\partial_{t, \mathbf{v}} \varphi$ la fonction continue bornée définie par

$$\partial_{t, \mathbf{v}} \varphi(i, x, s) = \partial_t \tilde{\varphi}(i, g(i, x, -s), s) \quad (5.7)$$

pour tout $(i, x, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

Nous montrons alors que le résultat de la Proposition 5.2 s'étend aux fonctions φ de $C_b(d, E, \mathbf{v})$:

Proposition 5.4 *Si $\mathbf{P} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}(E \times \mathbb{R}^d)$ vérifie (5.4) pour toute $f \in D_0$, la mesure $m(i, dx, ds) = \mathbf{P}(s)(i, dx) ds$ vérifie alors $m(E \times \mathbb{R}^d \times [0, T]) < \infty$ pour tout $T \in \mathbb{R}_+$ et*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y, s) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x, s) \right) m(i, dx, ds) \\ & + \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{t, \mathbf{v}} \varphi(i, x, s) m(i, dx, ds) + \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x, 0) \rho_0(i, dx) \\ & = 0 \end{aligned}$$

pour toute fonction $\varphi \in C_b(d, E, \mathbf{v})$ telle qu'il existe $T > 0$ pour lequel $\varphi(\cdot, \cdot, t) = 0$ pour tout $t > T$.

Pour ce faire, on étend tout d'abord le résultat de la Proposition 5.2 aux fonctions φ de $C_b(d, E, \mathbf{v})$ qui sont lipschitziennes et à support compact, puis à toutes les fonctions φ de $C_b(d, E, \mathbf{v})$, en utilisant des fonctions régularisantes.

Pour la différence $\tilde{m}(i, dx, ds) = \tilde{\mathbf{P}}(s)(i, dx) ds$, nous savons maintenant que (5.6) est vérifiée pour toutes les fonctions ψ de la forme

$$\psi(i, x, s) = \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y, s) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x, s) \right) + \partial_{t, \mathbf{v}} \varphi(i, x, s)$$

où $\varphi \in C_b(d, E, \mathbf{v})$ est telle qu'il existe $T > 0$ pour lequel $\varphi(\cdot, \cdot, t) = 0$ pour tout $t > T$.

Nous montrons ensuite que toute application $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)^E$ peut se mettre sous une telle forme. Pour ce faire, nous remarquons que, grâce à

(5.7), cela revient à montrer que, pour toute $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)^E$, il existe $\tilde{\varphi}$ telle que

$$\begin{aligned} & \partial_s \tilde{\varphi}(i, \tilde{x}, s) \\ &= \psi(i, g(i, \tilde{x}, s), s) \\ & - \sum_{j \in E} a(i, j, g(i, \tilde{x}, s)) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\varphi}(j, g(i, y, -s), s) \mu_{(i, j, g(i, \tilde{x}, s))}(\mathrm{d}y) - \tilde{\varphi}(i, \tilde{x}, s) \right) \end{aligned}$$

pour tout $(i, \tilde{x}, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, avec $\tilde{\varphi}(\cdot, \cdot, T) = 0$ où T est tel que $\psi(\cdot, \cdot, t) = 0$ pour tout $t > T$. Cette équation est de la forme

$$\partial_s \tilde{\varphi}(i, \tilde{x}, s) = R(\tilde{\varphi}, s)(i, \tilde{x})$$

et on conclut ensuite sur l'existence de $\tilde{\varphi}$ à l'aide d'un théorème de Cauchy-Lipschitz sur un espace fonctionnel.

Il reste alors à conclure : pour la différence $\tilde{m}(i, \mathrm{d}x, \mathrm{d}s) = \tilde{\mathbf{P}}(s)(i, \mathrm{d}x) \mathrm{d}s$, nous savons maintenant que (5.6) est vérifiée pour toute $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)^E$. On en déduit que $\tilde{\mathbf{P}}(s)(i, \mathrm{d}x)$ est nulle $\mathrm{d}s$ presque sûrement, et donc pour tout s , grâce à un argument de continuité.

En résumé, nous avons maintenant à notre disposition le résultat suivant, qui caractérise la loi marginale $\rho_t(\cdot, \mathrm{d}x)$ d'un PDMP :

Théorème 5.5 *Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 , l'application \mathbf{P} définie par $\mathbf{P}(t)(\cdot, \mathrm{d}x) = \rho_t(\cdot, \mathrm{d}x)$ pour tout $t \geq 0$ est l'unique solution faible des équations de Chapman-Kolmogorov sur D_0 , au sens où c'est l'unique application $\mathbf{P} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}(E \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifie (5.4) pour toute $f \in D_0$.*

Remarquons que dans la Proposition 5.2, il suffit que \mathbf{P} vérifie (5.4) pour toute f de classe C_1 sur $E \times \mathbb{R}^d$ et à support compact ($f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$) pour pouvoir conclure. Le reste s'étend sans aucune difficulté de sorte que $(\rho_t(\cdot, \mathrm{d}x))_{t \geq 0}$ apparaît alors comme l'unique famille de probabilités solution de (5.4) pour toute $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$, c'est-à-dire l'unique solution faible des équations de Chapman-Kolmogorov sur $C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$. C'est cette caractérisation que nous utilisons par la suite.

5.4 Schéma de volumes finis explicite

[P8] C. Coccozza-Thivent, R. Eymard, S. Mercier (2006) A finite volume scheme for dynamic reliability models, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26(3), pp. 446-471.

Partant des équations de Chapman-Kolmogorov, nous nous proposons maintenant d'approcher la loi marginale $\rho_t(\cdot, \mathrm{d}x)$ d'un PDMP par une méthode de volumes finis explicite. Le schéma proposé, ainsi que la démonstration de sa convergence, reposent essentiellement sur ces équations, dont

nous savons, d'après le paragraphe précédent, que $\rho_t(\cdot, dx)$ est l'unique solution faible sur $C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$. Pour mieux comprendre le contexte, nous nous plaçons, uniquement pour cette introduction, dans le cas où $\rho_0(\cdot, dy)$ et $\mu_{(i,j,x)}(dy) = m_{i,j,x}(y) dy$ sont des mesures à densité, $\rho_0(i, dx) = u_0(i, x) dx$ et $\mu_{(i,j,x)}(dy) = m_{i,j,x}(y) dy$. Dans ce cas, on peut vérifier que $\rho_t(\cdot, dx)$ est aussi une mesure à densité, $\rho_t(i, dx) = u(i, x, t) dx$ avec $(i, x) \mapsto u(i, x, t)$ intégrable pour tout t . Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent alors (au moins formellement) sous la forme forte suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t}(i, x, t) + \operatorname{div}(u(i, x, t)\mathbf{v}(i, x)) \\ &= \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} a(j, i, y) u(j, y, t) m_{j,i,y}(x) dy - u(i, x, t) b(i, x), \end{aligned} \quad (5.8)$$

avec $u(i, x, 0) = u_0(i, x)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $i \in E$.

Dans le vocabulaire de l'analyse numérique, les équations (5.8) sont des équations différentielles partielles de type hyperbolique linéaire, couplées par leur second membre. Contrairement au cadre usuel d'étude pour ce type d'équations, où les fonctions sont généralement intégrables (L_1) et bornées (L_∞), les solutions sont ici des densités de probabilités, c'est-à-dire des fonctions certes intégrables mais pas nécessairement bornées. Ce cadre inhabituel nécessite l'emploi de techniques nouvelles pour l'étude de schémas associés à ce type d'équations. Ainsi, la relative compacité dans L_∞ d'une famille bornée de solutions approchées qui est habituellement utilisée, correspond ici à la relative compacité d'une famille de probabilités, ce qui implique de montrer qu'elle est tendue pour permettre des passages à la limite. Ceci s'avère assez technique (voir détails plus loin). De la même façon, les démonstrations usuelles reposent sur des inégalités de type BV (Bounded Variation) faibles, qu'il semble impossible d'obtenir ici dans un cadre général. Ceci nous amène à un résultat de convergence sous une condition du type "pas d'espace"/"pas de temps" qui tend vers zéro (ainsi que le pas de temps), alors que les conditions usuelles, appelées conditions CFL (Courant–Friedrichs–Lewy), sont du type inverse, à savoir "pas de temps"/"pas d'espace" borné. Ceci constitue une différence essentielle entre le cadre probabiliste de ce papier et le cadre usuel.

Nous commençons par présenter le schéma de volumes finis étudié, puis nous esquissons quelques mots sur la démonstration de sa convergence. Dans tout le paragraphe, un maillage admissible de \mathbb{R}^d est une partition \mathcal{M} de \mathbb{R}^d , formée de boréliens tels que :

- $m(K) := \int_K dx > 0$ pour tout $K \in \mathcal{M}$,
- $\sup_{K \in \mathcal{M}} \operatorname{diam}(K) < +\infty$ où $\operatorname{diam}(K) = \sup_{\{x,y\} \in K^2} |x - y|$.

Pour un maillage admissible \mathcal{M} , on note alors $h_{\mathcal{M}} := \sup_{K \in \mathcal{M}} \text{diam}(K)$.

Etant donné un réel $\delta t > 0$ et un maillage admissible \mathcal{M} de \mathbb{R}^d , le but du schéma numérique proposé est de construire une approximation $P_t^{\mathcal{M}, \delta t}(\cdot, x) dx$ de la mesure $\rho_t(\cdot, dx)$, avec une densité $P_t^{\mathcal{M}, \delta t}(\cdot, x)$ constante sur chaque $\{i\} \times [n \delta t, (n+1) \delta t] \times K$:

$$P_t^{\mathcal{M}, \delta t}(i, x) := p_n^{(i, K)} \quad (5.9)$$

pour tout $(i, x, t) \in E \times K \times [n \delta t, (n+1) \delta t]$, tout $K \in \mathcal{M}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour cela, on construit la famille $(p_n^{(i, K)})_{(i, n, K) \in E \times \mathbb{N} \times \mathcal{M}}$ récursivement sur n . On initialise le schéma par :

$$m(K) p_0^{(i, K)} = \int_K \rho_0(i, dx) \quad (5.10)$$

pour tout $(i, K) \in E \times \mathcal{M}$.

Afin de transcrire la partie "transport" des équations de Chapman-Kolmogorov (5.4), nous introduisons les notations suivantes : on pose

$$m_{KL}^{(i)} = \int_{\{y \in L / g(i, y, \delta t) \in K\}} dy$$

$$m(K) \tilde{p}_n^{(i, K)} = \sum_{L \in \mathcal{M}} m_{KL}^{(i)} p_n^{(i, L)}$$

pour tout $(i, K, L) \in E \times \mathcal{M}^2$.

La quantité $m(K) \tilde{p}_n^{(i, K)}$ représente la masse totale de probabilité qui arrive dans la maille (i, K) à l'instant $(n+1) \delta t$ par transport le long des trajectoires en un pas de temps δt .

Pour la partie "saut" des équations CK, nous notons :

$$m(L) a_{KL}^{(ij)} = \int_L a(j, i, y) \int_K \mu(j, i, y)(dx) dy$$

$$m(K) b_K^{(i)} = \int_K b(i, x) dx$$

pour tout $(i, j, K, L) \in E^2 \times \mathcal{M}^2$.

$a_{KL}^{(ij)}$ représente de taux de transition de la maille (j, L) vers la maille (i, K) et $b_K^{(i)}$ représente le taux de sortie de la maille (i, K) .

Le schéma considéré est de type décentré amont et s'écrit

$$m(K) p_{n+1}^{(i, K)} = \frac{1}{\delta t b_K^{(i)} + 1} m(K) \tilde{p}_n^{(i, K)} + \delta t \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} \frac{a_{KL}^{(ij)}}{\delta t b_L^{(j)} + 1} m(L) \tilde{p}_n^{(j, L)} \quad (5.11)$$

pour tout $(i, K, n) \in E \times \mathcal{M} \times \mathbb{N}$.

D'un point de vue probabiliste, $\frac{1}{\delta b_K^{(i)} + 1}$ représente la probabilité (approchée) qu'il n'y ait pas de saut sur $[n \delta t, (n + 1) \delta t]$, et $\delta t \frac{a_{KL}^{(ij)}}{\delta b_L^{(j)} + 1}$ représente la probabilité qu'il y ait un saut de (j, L) vers (i, K) .

Notons que dans ce schéma, nous considérons qu'il y a d'abord déplacement de la masse sur $[n \delta t, (n + 1) \delta t]$ puis saut éventuel (instantané) à l'instant $(n + 1) \delta t$. On aurait aussi pu envisager le contraire, à savoir saut en début de période puis déplacement de la masse.

Une propriété importante de ce schéma est qu'il est conservatif, c'est-à-dire que, à chaque pas de temps, l'approximation construite correspond à une mesure de probabilité :

$$\sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} P_t^{\mathcal{M}, \delta t}(\cdot, x) dx = \sum_{i \in E} \sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) p_n^{(i, K)} = 1 \quad (5.12)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est une conséquence immédiate du fait que

$$\sum_{i \in E} \sum_{K \in \mathcal{M}} a_{KL}^{(ij)} = b_L^{(j)}$$

pour tout $(j, L) \in E \times \mathcal{M}$.

Notons que d'un point de vue applicatif, une fois la famille $(p_n^{(i, K)})_{(i, n, K) \in E \times \mathbb{N} \times \mathcal{M}}$ construite selon (5.10 – 5.11), il est alors aisé de calculer des valeurs approchées des quantités d'intérêt, à savoir $\mathbb{E}_{\rho_0}(f(I_t, X_t))$ ou $\int_0^t \mathbb{E}_{\rho_0}(f(I_s, X_s)) ds$, en utilisant

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\rho_0}(f(I_t, X_t)) &= \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(i, x) \rho_t(i, dx) \\ &\simeq \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(i, x) P_t^{\mathcal{M}, \delta t}(i, x) dx \\ &= \sum_{i \in E} \sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) \bar{f}^{(i, K)} p_n^{(i, K)} \end{aligned}$$

où

$$\bar{f}^{(i, K)} = \frac{1}{m(K)} \int_K f(i, x) dx \quad (5.13)$$

représente la valeur moyenne de f sur la maille (i, K) .

Nous nous intéressons maintenant à la convergence du schéma, et nous énonçons notre résultat principal :

Théorème 5.6 *Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 , soit $(\mathcal{M}_m, \delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite formée de maillages admissibles et de pas de temps ($\delta_m > 0$) telle que $\delta_m \rightarrow 0$ et $\frac{h_{\mathcal{M}_m}}{\delta_m} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$. Pour $m \in \mathbb{N}$, soit $P_t^{\mathcal{M}_m, \delta_m}(\cdot, x) dx$ la probabilité approchée définie par (5.9) et le schéma (5.10 – 5.11), associée à $(\mathcal{M}_m, \delta_m)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la suite de probabilités $\left(P_t^{\mathcal{M}_m, \delta_m}(\cdot, x) dx\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une mesure de probabilités sur $E \times \mathbb{R}^d$, notée $\rho(t)(\cdot, dx)$. De plus, la famille $(\rho(t)(\cdot, dx))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est l'unique solution faible des équations de Chapman-Kolmogorov sur $C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$, c'est-à-dire la loi du PDMP associé.*

La première étape pour démontrer ce résultat consiste à montrer la tension de la famille de probabilité $\left(P_t^{\mathcal{M}_m, \delta_m}(\cdot, x) dx\right)_{m \in \mathbb{N}, t \in [0, T[}$ pour tout $T > 0$, qui est énoncée dans le lemme suivant, où les indices m de (\mathcal{M}, δ) ont été enlevés pour plus de lisibilité :

Lemme 5.7 *Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 , soient $\theta > 0$ et $T > 0$ fixés. Soient aussi \mathcal{M} un maillage admissible et $\delta > 0$ tels que $\theta > h_{\mathcal{M}}/\delta$ et $T > \delta$. Soient $(p_n^{(i, K)})_{i \in E, n \in \mathbb{N}, K \in \mathcal{M}}$ la solution du schéma (5.10 – 5.11) associée à (\mathcal{M}, δ) . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ ne dépendant que de $\varepsilon, T, V_1, V_2, \|a(i, j, \cdot)\|_\infty, \text{Card}E, \rho_0, \mu$ et θ , tels que*

$$\sum_{i \in E} \int_{B(0, R)} P_t^{\mathcal{M}, \delta}(i, x) dx > 1 - \varepsilon \quad (5.14)$$

pour tout n tel que $n\delta \leq T$, où $B(0, R)$ représente la boule fermée de \mathbb{R}^d de centre 0 et de rayon R . En d'autres termes, la famille de probabilités $\left(P_t^{\mathcal{M}, \delta}(\cdot, x) dx\right)_{\{(t, \mathcal{M}, \delta) : h_{\mathcal{M}}/\delta < \theta; 0 < t, \delta < T\}}$ est tendue.

Pour obtenir ce résultat, il nous faut montrer l'existence de R indépendant de (n, \mathcal{M}, δ) tel que

$$\sum_{\{K \in \mathcal{M} : K \subset \mathbb{R}^d \setminus B(0, R)\}} \sum_{i \in E} m(K) p_n^{(i, K)} \leq \varepsilon$$

pour tout n tel que $n\delta \leq T$, le problème étant le contrôle de la propagation de la masse de probabilités, d'une part lors des sauts, d'autre part par transport.

Pour ce faire, on construit une famille $\left(R_n^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}$ par double récurrence, de la façon suivante : on choisit tout d'abord $R_0^{(0)}$ tel que

$$\sum_{\{K \in \mathcal{M} : K \subset \mathbb{R}^d \setminus B(0, R_0^{(0)})\}} \sum_{i \in E} m(K) p_0^{(i, K)} \leq \varepsilon$$

En supposant $R_n^{(k)}$ connu, on construit ensuite $R_{n+1}^{(k)}$ de façon à contrôler la propagation de la masse par transport en un pas de temps : on choisit ainsi $R_{n+1}^{(k)}$ tel que $R_n^{(k)} \leq R_{n+1}^{(k)}$ et tel que, si $x \in B(0, R_n^{(k)} + \theta \delta)$, alors $g(i, x, \delta) \in B(0, R_{n+1}^{(k)})$ pour tout $i \in E$.

On montre ensuite l'existence de $\bar{R}^{(k)}$, indépendant de (n, \mathcal{M}, δ) tel que $R_n^{(k)} \leq \bar{R}^{(k)} < +\infty$ pour tous (n, \mathcal{M}, δ) .

On construit alors $R_0^{(k+1)}$ de telle sorte que, si $y \in B(0, \bar{R}^{(k)} + \theta T)$, alors $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, R_0^{(k+1)})} \mu_{(j, i, y)}(dx) \leq \varepsilon$ pour tous $i, j \in E$, ce qui permet de contrôler la propagation de la masse lors des sauts. Cette étape est basée sur la tension de la famille $\{\mu_{(i, j, x)}(dy)\}_{x \in B(0, R)}$, qui est une conséquence de l'hypothèse sur μ dans \mathcal{H}_1 .

La double suite $(R_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}$ étant construite, on pose ensuite

$$q_n^{(k)} = \sum_{\{K \in \mathcal{M} : K \subset \mathbb{R}^d \setminus B(0, R_n^{(k)})\}} \sum_{i \in E} m(K) p_n^{(i, K)}$$

pour tous $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ et on montre, à l'aide du schéma, que

$$q_{n+1}^{(k)} \leq \frac{1}{\delta B + 1} q_n^{(k)} + \frac{\delta B}{\delta B + 1} q_n^{(k-1)} + \delta B \varepsilon$$

pour tous $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. On en déduit l'existence de k_0 indépendant de (n, \mathcal{M}, δ) tel que $q_n^{(k_0)} < C\varepsilon$ pour tous n tel que $0 \leq n\delta \leq T$, où C est une constante indépendante de (n, \mathcal{M}, δ) .

Comme $\bar{R}^{(k_0)} \geq R_n^{(k_0)}$, le rayon $R = \bar{R}^{(k_0)}$ répond alors au problème posé et permet de conclure quant à la tension de la famille de probabilités considérée.

Nous revenons maintenant au Théorème 5.6, dont nous esquissons les principales étapes de démonstration : étant donnée une suite de réels positifs $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dense dans \mathbb{R}_+ , grâce à la tension et au Théorème de Prohorov, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on peut extraire de $(\mathcal{M}_m, \delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(\mathcal{M}_{\sigma_p(k)}, \delta_{\sigma_p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(P_{t_p}^{\mathcal{M}_{\sigma_p(k)}, \delta_{\sigma_p(k)}}(\cdot, x) dx)_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une mesure de probabilités. Grâce à un procédé diagonal, on construit alors une sous-suite $(\mathcal{M}_{\sigma(k)}, \delta_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\mathcal{M}_m, \delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$, telle que $(P_{t_p}^{\mathcal{M}_{\sigma(k)}, \delta_{\sigma(k)}}(\cdot, x) dx)_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On montre ensuite que, pour toute $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$ et tout $t > 0$, la suite $(\sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(i, x) P_t^{\mathcal{M}_{\sigma(k)}, \delta_{\sigma(k)}}(i, x) dx)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, de sorte que $(P_t^{\mathcal{M}_{\sigma(k)}, \delta_{\sigma(k)}}(\cdot, x) dx)_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une probabilité

$\rho(t)(\cdot, dx)$ pour tout $t \geq 0$. Notons que cette étape nécessite des résultats préliminaires que nous ne détaillons pas ici, ainsi que la tension.

Nous savons maintenant que la suite $\left(P_t^{\mathcal{M}_m, \delta_m}(\cdot, x) dx\right)_{m \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge faiblement vers une probabilité $\rho(t)(\cdot, dx)$ pour tout $t \geq 0$. Il s'agit alors de montrer que toutes les sous-suites faiblement convergentes convergent vers la même limite. Pour ce faire, nous montrons que la limite $\rho(t)(\cdot, dx)$ vérifie les équations de Chapman-Kolmogorov sur $C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$, ce qui permettra de conclure par unicité de la solution. Nous partons pour cela du schéma numérique et d'une fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$, et pour simplifier l'écriture, nous notons maintenant $(\mathcal{M}_m, \delta_m)$ sous la forme (\mathcal{M}, δ) . On multiplie (5.11) par $\bar{\varphi}^{(i,K)}$ (défini comme $\tilde{f}^{(i,K)}$, cf (5.13)) et on somme sur $i \in E$, $K \in \mathcal{M}$ et sur n entre n_1 et $n_2 - 1$ (ou entre 0 et $n - 1$). Le résultat obtenu se met sous la forme

$$-T_1^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) + T_2^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) - T_3^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) = 0 \quad (5.15)$$

avec

$$\begin{aligned} T_1^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) &= \sum_{i \in E} \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) \tilde{p}_n^{(i,K)} \frac{\delta t b_K^{(i)}}{\delta t b_K^{(i)} + 1} \bar{\varphi}^{(i,K)}, \\ T_2^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) &= \sum_{i \in E} \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \delta t \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{KL}^{(ij)} \frac{m(L) \tilde{p}_n^{(j,L)}}{\delta t b_L^{(j)} + 1} \bar{\varphi}^{(i,K)}, \\ T_3^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) &= \sum_{i \in E} \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \left[m(K) p_{n+1}^{(i,K)} - m(K) \tilde{p}_n^{(i,K)} \right] \bar{\varphi}^{(i,K)}. \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, le terme $T_i^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2)$ est proche du terme $S_i^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2)$ défini par :

$$\begin{aligned} S_1^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) &= \sum_{i \in E} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} b(i, x) \varphi(i, x) P_t^{\mathcal{M}, \delta}(i, x) dx dt, \\ S_2^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) &= \sum_{i \in E} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left(\int \varphi(j, y) \mu(i, j, x)(dy) \right) \\ &\quad \times P_t^{\mathcal{M}, \delta}(i, x) dx dt, \\ S_3^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) &= \sum_{i \in E} \left[- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x) P_t^{\mathcal{M}, \delta}(i, x) dx dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x) P_{t_1}^{\mathcal{M}, \delta}(i, x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x) P_{t_2}^{\mathcal{M}, \delta}(i, x) dx \right]. \end{aligned}$$

Plus précisément, nous montrons dans [P8] que

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\delta \rightarrow 0, h_{\mathcal{M}} \leq \theta \delta} \left(T_1^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) - S_1^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) \right) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0, h_{\mathcal{M}} \leq \theta \delta} \left(T_2^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) - S_2^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) \right) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0, h_{\mathcal{M}}/\delta \rightarrow 0} \left(T_3^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) - S_3^{\mathcal{M}, \delta}(\varphi, t_1, t_2) \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Remarquons que seul le dernier terme, dû au transport, nécessite $h_{\mathcal{M}}/\delta \rightarrow 0$.

En revenant maintenant à la suite $\left(P_t^{\mathcal{M}_m, \delta_m}(\cdot, x) dx \right)_{m \in \mathbb{N}}$, dont on sait qu'elle converge faiblement vers $\rho(t)(\cdot, dx)$, en faisant tendre m vers $+\infty$ dans (5.15) et en utilisant les résultats de (5.16), on montre alors que $(\rho(t)(i, dx))_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifie les équations de Chapman-Kolmogorov pour $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$, ce qui permet de conclure.

La convergence du schéma étant établie, nous nous sommes ensuite attachés à regarder son efficacité sur un exemple, issu de (Labeau, 1996). Cet exemple est traité dans [P8], mais aussi dans [CI9], et ce, de façon un peu plus précise. Son intérêt est que l'on dispose pour cet exemple de formules analytiques pour les lois marginales du PDMP sous-jacent, ce qui permet de vérifier la qualité des résultats numériques obtenus. Par ailleurs, on dispose aussi des résultats obtenus par simulations de Monte-Carlo par Pierre-Etienne Labeau, ce qui permet de comparer la méthode de volumes finis présentée ici avec celle qui est la plus communément utilisée. Les performances de la méthode de volumes finis observées sur cet exemple semblent bonnes, tant d'un point de vue résultats que d'un point de vue temps de calcul.

Cependant, d'autres tests, effectués sur d'autres exemples, montrent que le schéma explicite présenté ici perd en précision lorsque l'on se rapproche du régime asymptotique, ainsi que nous l'avions observé à la fin du paragraphe 4.3 pour le schéma présenté dans (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004b) dans un cadre semi-markovien. Par ailleurs, la condition $h_{\mathcal{M}}/\delta \rightarrow 0$ nécessaire ici à la convergence du schéma peut se révéler restrictive en pratique. Ceci nous a amené à regarder d'autres schémas, cette fois-ci de type implicite.

5.5 Schéma de volumes finis implicite

[P13] Robert Eymard, Sophie Mercier, Alain Prignet (2008) An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes, *Journal of*

of *Computational and Applied Mathematics*, available online 1 Nov. 2007.

Nous présentons maintenant un schéma de type volumes finis implicite, qui fournit une nouvelle façon d'approcher la loi marginale $\rho_t(\cdot, dx)$ d'un PDMP. Afin de clarifier la présentation, nous nous plaçons ici dans le cas particulier où E est réduit à un singleton. La partie discrète I_t du PDMP est alors constante et par conséquent inutile. Un tel PDMP est appelé "Markov Growth-Collapse process" (GCP) dans la littérature (Boxma *et al.*, 2006). Typiquement, un GCP décrit l'évolution d'une quantité, par exemple la taille d'une file d'attente, avec des phases successives de croissance déterministe (Growth) et d'effondrement (Collapse) instantané. Plus généralement, un GCP est un PDMP $(X_t)_{t \geq 0}$ qui saute avec un taux $\lambda(X_t)$, la loi de X_t juste après un saut à l'instant t étant une fonction $\mu_{X_{t-}}$. L'évolution d'un GCP est typique d'un PDMP et l'extension des résultats présentés ici aux PDMP est immédiate, voir [P13, §6].

Comme pour le schéma de type explicite, le schéma implicite présenté ici, ainsi que la démonstration de sa convergence, reposent sur la caractérisation de la loi marginale $\rho_t(dx)$ d'un GCP comme unique solution de l'équation de Chapman-Kolmogorov sur $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ (pour un GCP, il n'y en a plus qu'une), qui s'écrit ici :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \rho_t(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \rho_0(dx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{v}(x) \cdot \nabla \varphi(x)) \rho_s(dx) ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \lambda(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu_x(dy) - \varphi(x) \right) \rho_t(dx) ds \end{aligned} \quad (5.17)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, toute $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$.

Après avoir écrit un premier schéma implicite de type décentré amont classique pour cette équation, nous nous sommes aperçus, en étudiant la convergence de ce schéma, que nous avons besoin pour conclure, de résultats du type

$$\forall R, T > 0, \lim_{h_{\mathcal{M}} \rightarrow 0} h_{\mathcal{M}} \times \int_0^T |P_t^{\mathcal{M}, \delta}(x)|_{BV(B(0,R))} dt = 0, \quad (5.18)$$

où $P_t^{\mathcal{M}, \delta}(x) dx$ représente l'approximation de $\rho_t(dx)$ fournie par le schéma et où, pour une fonction $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on note $|v|_{BV(\Omega)}$ la semi-norme BV de v sur Ω définie par

$$|v|_{BV(\Omega)} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} v(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx, \text{ avec } \varphi \in C^1(\mathbb{R}^d) \text{ à support compact,} \right. \\ \left. \|\varphi\|_{\infty} \leq 1, \varphi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \right\}.$$

Malheureusement, comme pour le schéma explicite, les papiers antérieurs montrant ce type de résultats, cf (Champier *et al.*, 1993) ou (Eymard *et al.*, 1995) par exemple, ne s'appliquent pas au cadre L_1 de notre étude. Afin de montrer (5.18), nous avons alors développé une nouvelle inégalité de type BV-faible, de la forme :

$$\int_0^T |P_t^{\mathcal{M}, \delta}(x)|_{BV(B(0,R))} dt \leq \frac{C}{h_{\mathcal{M}}^{1/q}}, \quad (5.19)$$

pour un $1 < q < 2$, à partir de laquelle (5.18) se déduit aisément. Pour montrer cette inégalité, nous utilisons des techniques inspirées de (Droniou *et al.*, 2003) et de (Gallouët et Herbin, 1999), ainsi que de (Boccardo et Gallouët, 1989) et (Boccardo *et al.*, 1993), qui ne fonctionnent cependant pas pour un schéma de type décentré amont classique, nécessitant un terme de viscosité. (Ces techniques ne fonctionnent donc pas pour le schéma explicite présenté précédemment). Ces remarques nous ont amené à considérer un schéma intermédiaire entre un schéma décentré amont et un schéma de Lax-Friedrichs modifié, qui comprend quant à lui un terme de viscosité. Ce schéma est donné un peu plus loin.

Grâce à l'inégalité BV-faible, le résultat de convergence obtenu ici est valide dès que les pas de temps et d'espace tendent vers 0, sans aucune condition de type CFL ou CFL inverse. Par ailleurs, cette inégalité BV-faible est indépendante du schéma et peut être utilisée telle quelle dans d'autres contextes, comme pour l'étude de schémas de volumes finis pour des équations hyperboliques sur \mathbb{R} , linéaires ou pas, avec une donnée initiale dans L_1 .

La démonstration de l'inégalité BV-faible est le point le plus technique de ce travail, ainsi que la partie qui consiste à montrer que l'on peut appliquer cette inégalité à la solution du schéma. Un autre point technique est, dans une moindre mesure, l'étude de la tension de la famille de lois approchées, que nous obtenons ici par une approche différente de celle adoptée pour le schéma explicite.

Ces quelques points étant spécifiés, nous présentons maintenant le schéma étudié et précisons tout d'abord nos hypothèses de travail (\mathcal{H}'_1) :

- ρ_0 est une mesure de probabilités sur \mathbb{R}^d ,
- la fonction de taux $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et bornée par $\Lambda = \|\lambda\|_\infty$,
- la fonction $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est telle que, pour toute $\psi \in C_b(\mathbb{R}^d)$, la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \mu_x(dy)$ est continue (bornée) de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} ,
- la vitesse $\mathbf{v} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est Lipschitz continue et bornée par $V = \|\mathbf{v}\|_\infty > 0$.

Ces hypothèses correspondent aux hypothèses \mathcal{H}_1 adaptées au cas d'un GCP, mis à part pour la vitesse \mathbf{v} , où les hypothèses sont un peu plus fortes dans \mathcal{H}'_1 que dans \mathcal{H}_1 .

Dans tout ce paragraphe, un maillage admissible de \mathbb{R}^d est admissible au sens du paragraphe précédent, et vérifie en plus les conditions de régularité suivantes :

1. Pour tout $K \in \mathcal{M}$, l'intérieur de K est un ouvert convexe de \mathbb{R}^d .
2. Pour tout $K \in \mathcal{M}$, on note ∂K la frontière de K et, pour tout $L \in \mathcal{M}$, on note $K|L = \partial K \cap \partial L$. Alors, pour tout $K \in \mathcal{M}$, il existe $\mathcal{N}_K \subset \mathcal{M}$ tel que $K \notin \mathcal{N}_K$ et tel que $\partial K = \bigcup_{L \in \mathcal{N}_K} K|L$. De plus, pour $L \in \mathcal{N}_K$, la face $K|L$ est incluse dans un hyperplan de \mathbb{R}^d , et a une mesure $N - 1$ dimensionnelle égale à $m(K|L)$. On note \mathbf{n}_{KL} le vecteur unitaire normal à la face $K|L$, orienté de K vers L .
3. Il existe $C_1 \geq 1$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} h_{\mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) &\leq m(K) \leq C_1 h_{\mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) \\ \frac{1}{C_1} h_{\mathcal{M}} &\leq \text{diam}(K) \leq h_{\mathcal{M}} \\ \frac{1}{C_1} h_{\mathcal{M}}^d &\leq m(K) \leq C_1 h_{\mathcal{M}}^d \end{aligned}$$

pour tout $K \in \mathcal{M}$. On note $C_{\mathcal{M}}$ la plus petite constante qui vérifie ces trois inégalités pour tout $K \in \mathcal{M}$.

Soit \mathcal{M} un maillage admissible de \mathbb{R}^d au sens précédent. Pour un tel maillage, on note

$$v_{K,L} = \frac{1}{m(K|L)} \int_{K|L} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{KL} \, ds(x) \quad (5.20)$$

pour tout $K \in \mathcal{M}$ et tout $L \in \mathcal{N}_K$, où $ds(x)$ représente la mesure $N - 1$ dimensionnelle sur $K|L$.

Soit $\varepsilon \in [0, V]$ fixé (où l'on rappelle que $V = \|\mathbf{v}\|_{\infty}$, cf \mathcal{H}'_1). On note alors

$$w_{K,L} = \max(|v_{K,L}|, \varepsilon) \quad (5.21)$$

pour tout $K \in \mathcal{M}$ et tout $L \in \mathcal{N}_K$.

Comme précédemment, on note aussi :

$$\begin{aligned} \lambda_K &= \frac{1}{m(K)} \int_K \lambda(x) \, dx \\ a_{K,L} &= \frac{1}{m(K)} \int_K \lambda(x) \left(\int_L \mu_x(dy) \right) dx \end{aligned}$$

pour tous $(K, L) \in \mathcal{M}^2$, où $\sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L} = \lambda_K$ pour tout $K \in \mathcal{M}$. (Les indices K et L sont inversés par rapport à la section précédente).

Etant donné un pas de temps $\delta t > 0$, le schéma s'écrit alors :

$$u_K^{(0)} = \frac{1}{m(K)} \int_K d\rho_{\text{ini}}(x) \quad (5.22)$$

pour tout $K \in \mathcal{M}$ et

$$\begin{aligned} & m(K)(u_K^{(n+1)} - u_K^{(n)}) \\ & + \delta t \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) \left(v_{K,L} \frac{u_K^{(n+1)} + u_L^{(n+1)}}{2} + \frac{w_{K,L}}{2} (u_K^{(n+1)} - u_L^{(n+1)}) \right) \\ & = -\delta t m(K) \lambda_K u_K^{(n+1)} + \delta t \sum_{L \in \mathcal{M}} m(L) a_{L,K} u_L^{(n+1)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

pour tout $(n, K) \in \mathbb{N} \times \mathcal{M}$.

Lorsque ε est égal à 0, on obtient un schéma décentré amont classique. Pour $\varepsilon > 0$ et $|v_{K,L}| \leq \varepsilon$ pour tout (K, L) , on obtient un schéma de Lax-Friedrichs modifié, avec un terme de viscosité non évanescent.

La diffusion due au terme de viscosité peut s'observer sur l'exemple très simple suivant : on considère un GCP $(X_t)_{t \geq 0}$ qui ne saute jamais ($\lambda(x) = 0$), tel que X_0 suit la loi uniforme sur $[-1, 0[$ et tel que la vitesse \mathbf{v} est donnée par

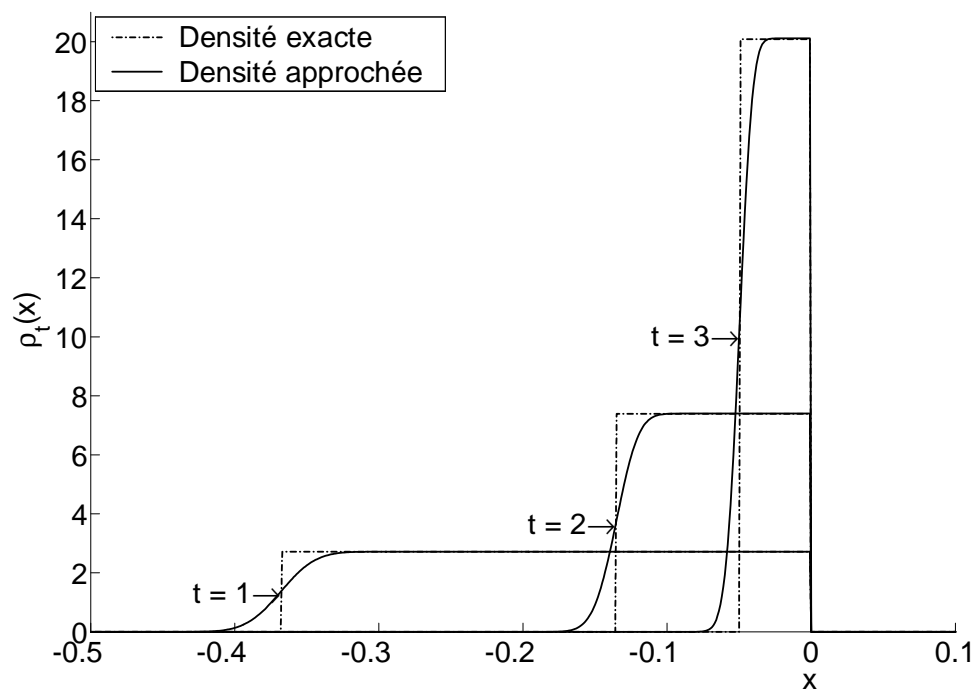
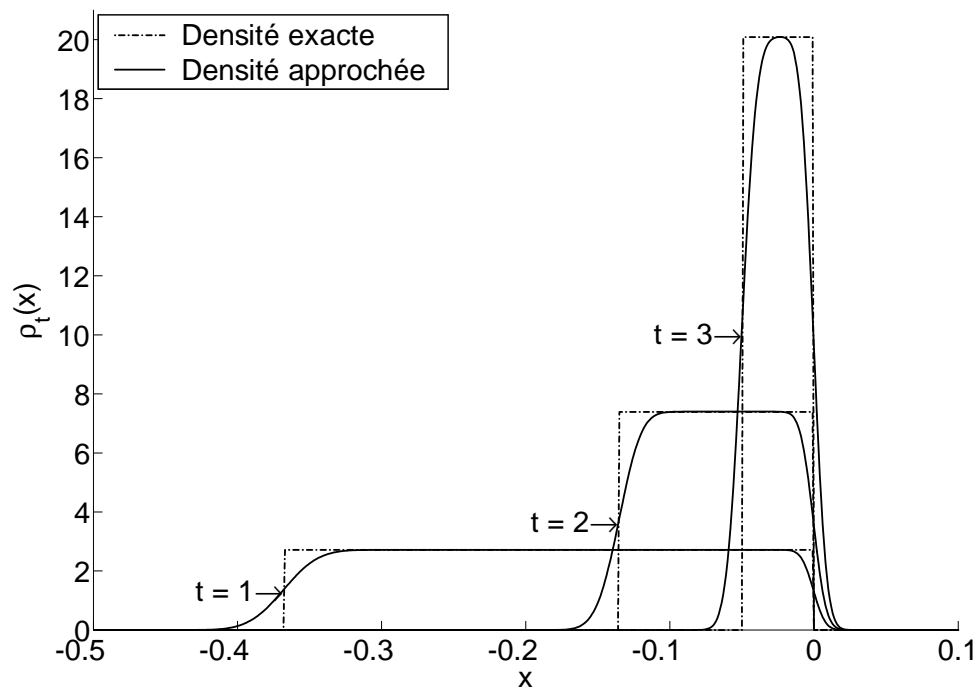
$$\mathbf{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < +1 \\ -1 & \text{si } x \geq +1 \end{cases}$$

Il est facile de voir que, dans cet exemple, X_t suit la loi uniforme sur $[-e^{-t}, 0[$, c'est-à-dire que $\rho_t(dx) = \mathbf{1}_{[-e^{-t}, 0[}(x) e^t dx$.

On prend $\mathcal{M} = \{[kh, (k+1)h[, k \in \mathbb{Z}\}$ avec $h = h_{\mathcal{M}} = 10^{-3}$ et $\delta t = 10^{-3}$. Les densités exactes et approchées sont tracées sur les figures 5.2 et 5.3 (voir page suivante) pour $t = 1, 2, 3$, avec respectivement $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 0.1$.

La figure 5.2 correspond à un schéma décentré amont classique pour lequel toute la masse de probabilités est concentrée sur $[-1, 0[$. Sur la figure 5.3, on observe au contraire de la diffusion autour de 0, située dans la bande $[-\varepsilon; \varepsilon]$, qui provient du fait que, dans cette bande, on a $|v_{K,L}| \leq \varepsilon$ et donc $w_{K,L} = \varepsilon$.

Nous abordons maintenant l'étude du schéma et indiquons quelques points clés pour montrer sa convergence. La première étape consiste tout

FIG. 5.2 – Densités exacte et approchée , cas $\varepsilon = 0$ FIG. 5.3 – Densités exacte et approchée , cas $\varepsilon = 0.1$

d'abord à montrer que (5.22 – 5.23) définit bien une unique famille $(u_K^{(n)})_{(n,K) \in \mathbb{N} \times \mathcal{M}}$, ce qui se fait récursivement sur n , à l'aide d'un théorème de point fixe sur l'espace de Banach $\mathcal{L}_1 = \{(u_K)_{K \in \mathcal{M}} \mid \sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) |u_K| < +\infty\}$. On vérifie aussi que le schéma est conservatif et que, pour tout $t \geq 0$, la mesure $P_t^{\mathcal{M}, \delta}(x) dx$ (définie de la même façon que $P_t^{\mathcal{M}, \delta}(\cdot, x) dx$ dans (5.9)) est une mesure de probabilités.

Le premier point clé pour l'étude de la convergence du schéma est, comme nous l'avons dit précédemment, l'inégalité BV-faible (5.19), qui s'écrit sous la forme suivante :

Lemme 5.8 (Inégalité BV faible) *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{M} un maillage admissible de \mathbb{R}^d (au sens défini au début de ce paragraphe). Si $d \geq 2$, soient $q \in]1, \frac{d+2}{d+1}[$ fixé et $m := [(2-q)(d+1)/d] - 1 > 0$. Si $d = 1$, soient $q \in]1, \sqrt{2}[$ et $m \in]0, \frac{2-q^2}{q}[$. Soit aussi $(\hat{u}_K^{(n)})_{K \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) \hat{u}_K^{(n)} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle qu'il existe $R > 0$ pour lequel $\hat{u}_K^{(n)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $K \in \mathcal{M}$ tel que $K \not\subset B(0, R)$. Soit $T > 0$ et $\delta > 0$ fixés et soient*

$$T_1 = \delta \sum_{n=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) \frac{(\hat{u}_K^{(n+1)} - \hat{u}_L^{(n+1)})^2}{(1 + \max(\hat{u}_K^{(n+1)}, \hat{u}_L^{(n+1)}))^{m+1}} \quad (5.24)$$

et

$$\begin{aligned} T_2 &= \delta \sum_{n=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) \left| \hat{u}_K^{(n+1)} - \hat{u}_L^{(n+1)} \right| \\ &= \frac{\delta}{2} \sum_{n=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \left| \hat{u}^{(n+1)} \right|_{BV(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

où $\hat{u}^{(n+1)}(x) = \hat{u}_K^{(n+1)}$ pour presque tout $x \in K$ et tout $(K, n) \in \mathcal{M} \times \mathbb{N}$. Soient C_1 tel que $C_{\mathcal{M}} \leq C_1$ et C_2 tel que $\max(h_{\mathcal{M}}, \delta) < C_2$. Supposons qu'il existe C_3 tel que $T_1 \leq C_3$. Il existe alors C_4 , qui ne dépend que de d, R, T, q, m, C_1, C_2 et C_3 tel que :

$$T_2 \leq C_4 h_{\mathcal{M}}^{-1/q}. \quad (5.25)$$

La démonstration de ce lemme repose sur différentes majorations et utilisations de l'inégalité de Hölder, que nous ne détaillons pas ici. Signalons simplement que le principe général consiste à montrer que

$$T_3 = h_{\mathcal{M}}^{2-q} \sum_{n=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \delta \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) |\hat{u}_K^{(n+1)} - \hat{u}_L^{(n+1)}|^q$$

est borné indépendamment de $h_{\mathcal{M}}$ et reprend des idées de (Boccardo et Gallouët, 1989) et de (Boccardo *et al.*, 1993). Au cours de la démonstration, nous utilisons (et démontrons) aussi des inégalités de Sobolev, avec des énoncés et des démonstrations un peu différentes selon que $d \geq 2$ ou $d = 1$. Nous énonçons ici le résultat utilisé pour $d \geq 2$:

Lemme 5.9 (Inégalité de Sobolev discrète, cas $d \geq 2$) *Soient $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $d \geq 2$ et \mathcal{M} un maillage admissible de \mathbb{R}^d . Soit $(\widehat{u}_K)_{K \in \mathcal{M}}$ une famille de réels telle que le nombre de $K \in \mathcal{M}$ pour lequel $\widehat{u}_K \neq 0$ est fini. Soient $q \in]1, d[$ et $C_1 > C_{\mathcal{M}}$ donnés. Alors, il existe C_5 , ne dépendant que de d , q et C_1 , telle que :*

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) |\widehat{u}_K|^{q^*} \right)^{1/q^*} \leq \frac{C_5}{h_{\mathcal{M}}^{1-\frac{1}{q}}} \left(\sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) |\widehat{u}_K - \widehat{u}_L|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (5.26)$$

où $q^* = \frac{dq}{d-q}$.

Une fois l'inégalité BV-faible (Lemme 5.8) établie, le deuxième point technique consiste à montrer que l'on peut appliquer l'inégalité obtenue à la solution du schéma. Ceci est donné par le résultat suivant :

Lemme 5.10 *Supposons les hypothèses \mathcal{H}'_1 vérifiées et soit \mathcal{M} un maillage admissible de \mathbb{R}^d . Soient aussi $m \in]0, +\infty[$, $\delta > 0$ et $\varepsilon \in]0, V]$ donnés et soit $(u_K^{(n)})_{K \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}}$ l'unique solution du schéma (5.22 – 5.23). Soient $R > 0$ et $T > 0$ donnés, et soit $\theta^{(R)} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ telle que $\theta^{(R)}(s) = 1$ pour $s \in [0, R]$, $1 + R - s$ pour $s \in [R, R + 1]$ et 0 pour $s \geq R + 1$. On note*

$$\theta_K^{(R)} = \frac{1}{m(K)} \int_K \theta^{(R)}(|x|) dx$$

et on définit $(\widehat{u}_K^{(n)})_{K \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}}$ par

$$\widehat{u}_K^{(n)} = \theta_K^{(R)} u_K^{(n)}, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.27)$$

Soient C_1 tel que $C_{\mathcal{M}} \leq C_1$ et C_2 tel que $\max(h_{\mathcal{M}}, \delta) < C_2$. Soit aussi T_1 défini par (5.24). Il existe alors une constante C_3 , ne dépendant que de d , R , T , m , \mathbf{v} , C_1 , Λ , ε et C_2 , telle que

$$T_1 \leq C_3. \quad (5.28)$$

Nous ne détaillons pas la démonstration de ce lemme qui utilise une démarche similaire à celle de (Boccardo *et al.*, 1993). C'est ce résultat qui nécessite un terme de viscosité non évanescant dans le schéma ($\varepsilon > 0$).

Le troisième point clé pour la convergence concerne l'étude de la tension. Nous utilisons ici une démarche classique en probabilités, qui consiste à utiliser une fonction de Liapounov adéquate. Son existence est donnée par le lemme suivant :

Lemme 5.11 *Sous les hypothèses \mathcal{H}'_1 , il existe une fonction de Liapounov $\mathcal{V} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, et une constante $C_6 > 0$ indépendante des données telle que :*

- \mathcal{V} est Lipschitz-continue, avec une constante de Lipschitz inférieure ou égale à 1,
- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(x) = +\infty$,
- $\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} \, d\rho_0 < +\infty$,
- $\int_{\mathbb{R}^N} V(y) \, \mu_x(dy) \leq V(x) + C_6$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Pour montrer ce résultat, nous construisons de manière explicite une fonction \mathcal{V} qui convient. Cette construction repose sur la relative compacité (ou tension) de la famille $\{\mu_{(i,j,x)}(dy)\}_{x \in B(0,R)}$, que nous avons déjà utilisée pour obtenir la tension dans le cas explicite.

Une fois cette fonction \mathcal{V} construite, nous posons

$$s^{(n)}(\mathcal{V}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) u_K^{(n)} \mathcal{V}_K$$

où $\mathcal{V}_K = \frac{1}{m(K)} \int_K \mathcal{V}(x) \, dx$ pour tout $K \in \mathcal{M}$. En utilisant le schéma, on montre alors que

$$\sup_{\{(n,\varepsilon,\mathcal{M},\delta): 0 \leq n\delta \leq t; 0 \leq \varepsilon \leq V; 0 < h_{\mathcal{M}}, \delta \leq C_2\}} s^{(n)}(\mathcal{V}) = C_7 < +\infty.$$

Comme $\mathcal{V}(x)$ tend vers $+\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, on sait que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $R > 0$ tel que $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0, R)$ entraîne $\mathcal{V}(x) \geq \frac{1}{\alpha}$. Ceci entraîne que :

$$\alpha C_7 \geq \alpha s^{(n)}(\mathcal{V}) = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{V}(x) P_s^{\mathcal{M},\delta}(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} P_s^{\mathcal{M},\delta}(x) dx$$

pour tout $(n, \varepsilon, \mathcal{M}, \delta, s)$ tel que $0 \leq n\delta \leq t$, $0 \leq \varepsilon \leq V$, $0 < h_{\mathcal{M}}, \delta \leq C_2$, $n\delta \leq s < (n+1)\delta$ et permet de conclure quant à la tension de la famille $(P_s^{\mathcal{M},\delta}(x) dx)_{\{(s,\varepsilon,\mathcal{M},\delta): 0 \leq s \leq t; 0 \leq \varepsilon \leq V; 0 < h_{\mathcal{M}}, \delta \leq C_2\}}$.

Une fois ces points techniques établis, le principe général de la démonstration de la convergence du schéma implicite est similaire à celui donné pour le schéma explicite et nous ne le reprenons pas. Notons cependant que, dans l'équation de Chapman-Kolmogorov, on décompose ici le terme de transport sous la forme :

$$\mathbf{v}(x) \cdot \nabla \varphi(x) = \operatorname{div}(\varphi(x) \mathbf{v}(x)) - \varphi(x) \operatorname{div}(\mathbf{v}(x)),$$

ce qui nous amène, lorsque l'on écrit le pendant de (5.15) pour le schéma implicite, à scinder le terme de transport en deux parties :

$$\begin{aligned} & \delta t \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) \left(v_{K,L} \frac{u_K^{(n+1)} + u_L^{(n+1)}}{2} + \frac{w_{K,L}}{2} (u_K^{(n+1)} - u_L^{(n+1)}) \right) \varphi_K \\ &= -T_4^{\mathcal{M}, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_5^{\mathcal{M}, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \end{aligned}$$

où

$$T_4^{\mathcal{M}, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \delta t \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) u_K^{(n+1)} D_K \varphi_K$$

avec

$$D_K = \frac{1}{m(K)} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) v_{K,L} = \frac{1}{m(K)} \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}(x)) \, dx$$

pour tout $K \in \mathcal{M}$ et

$$\begin{aligned} T_5^{\mathcal{M}, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) &= \frac{\delta t}{2} \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} m(K|L) (w_{K,L} - v_{K,L}) \\ &\quad \times (u_K^{(n+1)} - u_L^{(n+1)}) \varphi_K. \end{aligned}$$

On montre facilement que $T_4^{\mathcal{M}, \delta t}(\varphi, t_1, t_2)$ est proche de

$$S_4^{\mathcal{M}, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \operatorname{div}(\mathbf{v}(x)) P_t^{\mathcal{M}, k}(t) \, dx \, dt.$$

En revanche, la démonstration de la proximité de $T_5^{\mathcal{M}, \delta t}(\varphi, t_1, t_2)$ avec

$$S_5^{\mathcal{M}, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\varphi(x) \mathbf{v}(x)) u_{\mathcal{M}, k}(x, t) \, dx \, dt$$

est plus délicate et nécessite l'utilisation de l'inégalité BV-faible à deux reprises.

Nous pouvons finalement énoncer le résultat de convergence qui est donné par le théorème suivant :

Théorème 5.12 *Sous les hypothèses \mathcal{H}'_1 , soit $(\mathcal{M}_l, \delta t_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite formée de maillages admissibles (\mathcal{M}_l) et de pas de temps $(\delta t_l > 0)$ telle que $\max(h_{\mathcal{M}_l}, \delta t_l) \rightarrow 0$ quand $l \rightarrow \infty$. Pour $l \in \mathbb{N}$, soit $P_t^{\mathcal{M}_l, \delta t_l}(x) \, dx$ la probabilité approchée définie par (5.9) et le schéma (5.22 – 5.23), associée à $(\mathcal{M}_l, \delta t_l)$. Soit $\varepsilon \in]0, V]$ fixé. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la suite de mesures de probabilités $\left(P_t^{\mathcal{M}_l, \delta t_l}(t) \, dx \right)_{l \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}^d converge faiblement vers une mesure de probabilités sur \mathbb{R}^d , notée $\rho(t)(dx)$. De plus, la famille $(\rho(t)(dx))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est l'unique solution faible des équations de Chapman-Kolmogorov (5.17) sur $C_c^1(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire la loi du GCP associé.*

Comme nous l'avons déjà signalé, l'extension des résultats précédents à un PDMP est immédiate. En particulier, le résultat de convergence pour un PDMP est énoncé dans le paragraphe 6 de [P13].

Notons qu'un exemple est donné dans [P13] où les résultats fournis par le schéma de volumes finis implicite sont comparés avec ceux donnés par simulation de Monte-Carlo, et avec des résultats asymptotiques partiels, atteignables analytiquement. Les résultats numériques obtenus par les différentes méthodes sont parfaitement cohérents, les temps de calcul étant en revanche clairement à l'avantage de la méthode de volumes finis par rapport à la simulation de Monte-Carlo.

5.6 Conclusion - Perspectives

Nous nous sommes attachés, dans ces différents travaux, à évaluer la loi marginale d'un PDMP, qui permet de calculer des quantités de la forme $\mathbb{E}(f(I_t, X_t))$ ou $\int_0^t \mathbb{E}(f(I_s, X_s)) ds$, c'est-à-dire la plupart des indicateurs instantanés et cumulés usuels en fiabilité dynamique. (Des exemples en sont donnés au prochain chapitre). Pour ce faire, nous avons proposé et étudié deux schémas de type volumes finis, l'un explicite, l'autre implicite. Les deux schémas ont été testés sur de petits exemples, et leurs résultats comparés à ceux obtenus par simulation de Monte-Carlo. Dans les deux cas, les schémas de type volumes finis s'avèrent performants en terme de temps de calcul par rapport aux méthodes de Monte-Carlo, les résultats numériques étant par ailleurs cohérents entre eux. Les résultats fournis par les deux schémas ont aussi été comparés, pour t grand, aux résultats analytiques asymptotiques, lorsque ceux-ci étaient disponibles. Dans ce cadre, les résultats obtenus à l'aide du schéma explicite montrent parfois un léger biais, contrairement à ceux obtenus avec le schéma implicite, qui semblent converger vers les bonnes valeurs.

En terme de temps de programmation, lorsque les e.d.o. définissant les trajectoires sont solubles explicitement, la loi du premier temps de saut T_1 est alors connue explicitement, avec

$$\mathbb{P}_{(i,x)}(T_1 > t) = e^{-\int_0^t b(i,g(i,x,s)) ds}$$

pour tout $(i, x, t) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Ceci permet de faire de la simulation de Monte-Carlo exacte (Zhang *et al.*, 2007), qui est très simple à programmer. Dans ce cas, le temps de développement logiciel nécessaire à la programmation des méthodes de Monte-Carlo sera sans doute inférieur à celui nécessaire aux méthodes de type volumes finis. Dans le cas contraire, on est obligé de discrétiser le temps et de résoudre numériquement les e.d.o., ce qui alourdit considérablement le temps de programmation des méthodes de Monte-Carlo, qui se rapproche alors de celui nécessaire aux méthodes de type volumes finis.

Notons que la programmation des schémas de type volumes finis ne nécessite en revanche aucune connaissance explicite des $g(i, x, t)$: en ce qui concerne le schéma implicite, il est donné uniquement en fonction des champs de vitesse $\mathbf{v}(i, x)$; pour le schéma explicite, le calcul numérique des $m_{KL}^{(i)}$ est fait en pratique à l'aide de l'approximation suivante :

$$m_{KL}^{(i)} = \int_{\{y \in L/g(i,y,\delta t) \in K\}} dy \simeq \int_{K|L} \max(0, \mathbf{v}(i, x) \cdot \mathbf{n}_{LK}(x)) \, ds(x),$$

qui ne fait intervenir là encore que la vitesse $\mathbf{v}(i, x)$.

Si nous comparons la programmation des deux schémas proposés, celle du schéma implicite est alourdie par la nécessité de résoudre un système linéaire à chaque pas de temps. À ce niveau, un schéma explicite est donc préférable. La convergence de ce schéma n'a cependant été montrée que sous une condition de type CFL inverse forte ($h_M/\delta t \rightarrow 0$), qui peut être restrictive d'un point de vue pratique. Il serait donc intéressant de poursuivre le travail afin de proposer un schéma explicite qui convergerait sous des conditions moins restrictives, et qui nécessiterait peut-être un peu moins de temps de développement logiciel qu'un schéma implicite.

Chapitre 6

Autres travaux en fiabilité dynamique

Mots clefs : Critères asymptotiques, Méthodes de volumes finis, Simulation de Monte-Carlo régénérative, Analyse de sensibilité, Equations de Chapman-Kolmogorov, Générateur, Loi stationnaire, Convergence vers la loi stationnaire.

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié de façon théorique diverses méthodes de volumes finis permettant d'évaluer des critères instantanés ou cumulés en fiabilité dynamique. L'objectif du premier travail que nous présentons ici (§6.2) est de mettre en évidence l'intérêt pratique de telles méthodes, l'idée étant de montrer à un public de type ingénieur, d'une part comment modéliser un exemple concret à l'aide des processus de Markov déterministes par morceaux, d'autre part comment évaluer numériquement les quantités d'intérêt associées. Pour ce faire, nous considérons un cas d'étude classique, issu du domaine pétrolier. Le système étudié est de dimension réduite, mais évolue en fonction d'un contexte environnemental typique de la fiabilité dynamique. Nous modélisons ce système à l'aide d'un PDMP puis nous calculons divers critères associés, d'une part par méthodes de volumes finis, d'autre part par simulation de Monte-Carlo.

Le paragraphe suivant (§6.3) est consacré à des études de sensibilité en fiabilité dynamique : les caractéristiques du PDMP sous-jacent (taux de transition, mesures de redistribution, vitesses d'évolution) sont supposées dépendre d'une famille de paramètres, et le problème est de comparer l'influence qu'ont ces différents paramètres sur un critère fiabiliste donné. Cette influence est étudiée au travers des dérivées de ce critère par rapport aux différents paramètres, dont nous montrons l'existence et que nous calculons. Les formulations obtenues sont des extensions de résultats connus pour les processus de Markov de sauts à espace d'état fini, et sont aisément évaluables

à partir des schémas de volumes finis présentés précédemment.

Enfin, dans le dernier paragraphe (§6.4), nous présentons rapidement les travaux effectués par Margot Desgrouas lors de sa thèse, consacrée au comportement asymptotique des PDMP (Desgrouas, 2007). Cette thèse a été co-dirigée par C. Coccozza-Thivent et par moi-même (50%) et a été soutenue le 30 janvier 2007.

6.2 Un cas d'étude

[P10] Robert Eymard, Sophie Mercier (2008) Comparison of numerical methods for the assessment of production availability of a hybrid system, *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 93, Issue 1, Jan. 2008, pp. 169-178, available online 29 Dec. 2006.

Nous nous intéressons ici à un cas-test proposé à l'origine par la société française Air Liquide en 2003 à un comité technique de l'ESRA (European Safety and Reliability Association). Ce cas-test a depuis été étudié à diverses reprises, cf (Labeau et Dutuit, 2004) et (Dufour *et al.*, 2006) par exemple. Il s'agit d'un système de production de gaz, pour lequel il faut calculer différents critères asymptotiques. Nous proposons pour notre part deux approches différentes, par méthode de volumes finis et par simulation de Monte-Carlo régénérative, que nous comparons.

Le système de production de gaz envisagé est composé de deux unités de production en parallèle, chacune pouvant être en marche ou en panne. Les taux maximaux de production de gaz pour les deux unités sont respectivement de $\phi_{1,\max}$ et de $\phi_{2,\max}$. Le système de production a pour vocation de produire du gaz au taux nominal ϕ_{nom} , avec $\max(\phi_{1,\max}, \phi_{2,\max}) < \phi_{nom} < \phi_{1,\max} + \phi_{2,\max}$. Lorsque les deux unités sont marche, la production est répartie sur les deux unités. Pour éviter de ne pas produire assez lorsqu'une unité est en panne, on utilise un réservoir \mathcal{R} , de capacité maximale R . Lorsqu'une unité est en panne, on puise dans \mathcal{R} pour compléter la production jusqu'au taux ϕ_{nom} , ceci tant que \mathcal{R} n'est pas vide. Lorsqu'une unité est en panne, l'autre produit selon son taux maximal. Le taux de production du système dépend alors du niveau dans \mathcal{R} : tant que \mathcal{R} n'est pas vide, le niveau de production est ϕ_{nom} ; lorsque \mathcal{R} est vide, si une unité est en panne, le taux de production est le taux maximum de l'unité en marche. Si les deux unités sont en panne et que \mathcal{R} est vide, le taux de production est nul. Lorsqu'une unité \mathcal{U}_i (où $i \in \{1, 2\}$) fonctionne à son régime nominal, son taux de panne est λ_i (constant). Lorsqu'elle fonctionne à son régime maximal, son taux de panne est $\lambda'_i = 10 \times \lambda_i$. Sa durée de réparation suit la loi log-normale $LN(\ln(\bar{t}_i), \sigma_i)$ de densité $l_{\ln(\bar{t}_i), \sigma_i}(t)$ et son taux de réparation est :

$$\mu_i(t) = l_{\ln(\bar{t}_i), \sigma_i}(t) / \int_t^{+\infty} l_{\ln(\bar{t}_i), \sigma_i}(s) ds$$

pour $t > 0$. Contrairement au cas-test initial et à [P10] qui envisagent quatre scenarii différents, nous supposons ici que, lorsque les deux unités sont en marche et que \mathcal{R} n'est pas plein, les unités tournent au régime maximal. Le surplus sert alors à remplir \mathcal{R} .

Nous modélisons ce système à l'aide d'un PDMP $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $E \times V$, avec $V = \mathbb{R}_+^2 \times [0, R]$ et $E = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$, où un 1 représente une unité en marche et un 0, une unité en panne. La variable environnementale est $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, X_{3,t})$, où, pour $i \in \{1, 2\}$, la v.a.r. $X_{i,t}$ représente la durée passée dans son état courant par l'unité U_i (en marche ou en panne), et où $X_{3,t}$ représente le volume de gaz dans le réservoir.

Pour $(\eta, \zeta, x) \in E^2 \times V$ avec $x = (x_1, x_2, x_3)$, le taux de transition $a(\eta, \zeta, x)$ est donné par le tableau suivant :

$\eta \backslash \zeta$	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)
(1, 1)		λ_2 if $x_3 = R$ λ'_2 if $x_3 < R$	λ_1 if $x_3 = R$ λ'_1 if $x_3 < R$	
(1, 0)	$\mu_2(x_2)$			λ'_1
(0, 1)	$\mu_1(x_1)$			λ'_2
(0, 0)		$\mu_1(x_1)$	$\mu_2(x_2)$	

Pour $(\eta, \zeta, x) \in E^2 \times V$, la mesure $\mu_{(\eta, \zeta, x)}(dy)$ est de la forme $\mu_{(\eta, \zeta, x)}(dy) = \delta_{F^{(\eta, \zeta)}(x)}(dy)$ où la fonction $F^{(\eta, \zeta)}(x)$ est donnée par :

$\eta \backslash \zeta$	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)
(1, 1)		$(0, 0, x_3)$	$(0, 0, x_3)$	
(1, 0)	$(0, 0, x_3)$			$(0, x_2, x_3)$
(0, 1)	$(0, 0, x_3)$			$(x_1, 0, x_3)$
(0, 0)		$(0, x_2, x_3)$	$(x_1, 0, x_3)$	

Enfin, pour $(\eta, x) \in E \times V$ et $x = (x_1, x_2, x_3)$, la trajectoire $t \mapsto g(\eta, x, t) = (g_1^\eta(x, t), g_2^\eta(x, t), g_3^\eta(x, t))$ est donnée par :

$$\begin{aligned} g_1^\eta(x, t) &= x_1 + t \\ g_2^\eta(x, t) &= x_2 + t \end{aligned}$$

et

$$g_3^{(\eta)}(x, t) = \begin{cases} x_3 + v^{(\eta)}t & \text{si } 0 \leq x_3 + v^{(\eta)}t \leq R \\ 0 & \text{si } x_3 + v^{(\eta)}t < 0 \\ R & \text{si } x_3 + v^{(\eta)}t \geq R \end{cases}$$

avec

η	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)
$v^{(\eta)}$	$\phi_{1,\max} + \phi_{2,\max} - \phi_{nom}$	$-\phi_{nom} + \phi_{1,\max}$	$-\phi_{nom} + \phi_{2,\max}$	$-\phi_{nom}$

Notons que le processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ ainsi défini n'est pas tout-à-fait un PDMP au sens donné au paragraphe 5.2 car $g(\eta, x, t)$ n'est pas solution d'une e.d.o.. ($g(\eta, x, t)$ est de classe C^1 uniquement par morceaux). En revanche, la fonction $g(\eta, x, t)$ vérifie la propriété de semi-groupe :

$$g(\eta, x, s+t) = g(\eta, g(\eta, x, s), t) \quad (6.1)$$

pour tous $s, t \geq 0$, ce qui permet d'affirmer que $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ est un PDMP au sens de (Jacobsen, 2006).

Le processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ ainsi construit est un processus régénératif, les temps d'entrée dans l'état de marche parfaite $((1, 1), (0, 0, R))$ délimitant les différents cycles. De plus, les cycles sont indépendants, de durée moyenne finie et de loi non-arithmétique. D'après la théorie du renouvellement, on sait alors que $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ admet une unique loi stationnaire π et que, pour f mesurable bornée :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t f(I_s, X_s) ds = \pi f \text{ p.s.}$$

Les quantités d'intérêt pour l'unité de production de gaz sont :

- la disponibilité asymptotique, définie comme étant la proportion asymptotique de temps passé en régime de production nominale, c'est-à-dire tel que le réservoir est non vide ($X_{3,s} > 0$) :

$$\begin{aligned} A_\infty &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_{3,s} > 0\}} ds \\ &= \sum_{\eta \in E} \pi(\eta, \mathbb{R}_+^2 \times]0, R]) \text{ p.s.} \\ &= 1 - \sum_{\eta \in E \setminus \{(1,1)\}} \pi(\eta, \mathbb{R}_+^2 \times \{0\}) \text{ p.s.} \end{aligned}$$

- la disponibilité de production asymptotique, qui correspond au rapport asymptotique entre la production réelle ϕ_t et la production nominale ϕ_{nom} :

$$\begin{aligned} PA_\infty &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\phi_s}{\phi_{nom}} ds \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\mathbf{1}_{\{X_{3,s} > 0\}} + \frac{\phi_{1,\max}}{\phi_{nom}} \mathbf{1}_{\{I_s=(1,0) \text{ et } X_{3,s}=0\}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_{2,\max}}{\phi_{nom}} \mathbf{1}_{\{I_s=(0,1) \text{ et } X_{3,s}=0\}} \right) ds \\ &= A_\infty + \frac{\phi_{1,\max}}{\phi_{nom}} \pi((1, 0), \mathbb{R}_+^2 \times \{0\}) \\ &\quad + \frac{\phi_{2,\max}}{\phi_{nom}} \pi((0, 1), \mathbb{R}_+^2 \times \{0\}) \text{ p.s.} \end{aligned}$$

- la fréquence annuelle asymptotique de perte totale de production, qui arrive lorsque les deux unités sont en panne et que le réservoir est vide :

$$f_{TLP} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8766}{t} \mathbb{E} \left(\sum_{0 < s \leq t} \left(\mathbf{1}_{\{I_s=(0,0) \text{ et } X_{3,s^-} > 0 \text{ et } X_{3,s}=0\}} + \mathbf{1}_{\{X_{3,s}=0 \text{ et } I_{s^-} \in \{(1,0),(0,1)\} \text{ et } I_s=(0,0)\}} \right) \right)$$

(une année comprend approximativement $365.25 \times 24 = 8766$ h).

- la fréquence annuelle asymptotique de perte de production nominale :

$$f_{LNP} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8766}{t} \mathbb{E} \left(\sum_{0 < s \leq t} \mathbf{1}_{\{X_{3,s^-} > 0 \text{ et } X_{3,s}=0\}} \right)$$

Pour les deux dernières quantités, il ne semble pas immédiat de les exprimer directement à l'aide de π . En revanche, en remarquant que, en régime stationnaire, la perte totale de production arrive avec la même fréquence que l'évènement "on recouvre de la production" (i.e. on passe d'une production nulle à une production non nulle), on obtient :

$$\begin{aligned} f_{TLP} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8766}{t} \mathbb{E} \left(\sum_{0 < s \leq t} \mathbf{1}_{\{X_{3,s^-}=0 \text{ et } I_{s^-}=(0,0) \text{ et } I_s \in \{(1,0),(0,1)\}\}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8766}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^2} (\mu_1(x_1) + \mu_2(x_2)) \\ &\quad \times \rho(s)((0,0), dx_1 \times dx_2 \times \{0\}) ds \text{ p.s.} \\ &= 8766 \times \left(\int_{\mathbb{R}_+} \mu_1(x_1) \pi((0,0), dx_1 \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}_+} \mu_2(x_2) \pi((0,0), \mathbb{R}_+ \times dx_2 \times \{0\}) \right) \text{ p.s.} \end{aligned}$$

On montre de même que

$$\begin{aligned} f_{LNP} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8766}{t} \mathbb{E} \left(\sum_{0 < s \leq t} \mathbf{1}_{\{X_{3,s^-}=0 \text{ et } I_{s^-} \in \{(0,1),(1,0)\} \text{ et } I_s=(1,1)\}} \right) ds \\ &= 8766 \times \left(\int_{\mathbb{R}_+} \mu_1(x_1) \pi((0,1), dx_1 \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}_+} \mu_2(x_2) \pi((1,0), \mathbb{R}_+ \times dx_2 \times \{0\}) \right) \text{ p.s.} \end{aligned}$$

Ces quantités d'intérêt étant définies, nous les évaluons tout d'abord par méthode de Monte-Carlo régénératif. Pour cela, on remarque qu'elles se mettent toutes sous la forme

$$c_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} c \left((I_u, X_u)_{0 < u \leq t} \right)$$

où c est mesurable, positive et additive, au sens où

$$c\left((I_u, X_u)_{0 < u \leq t+s}\right) = c\left((I_u, X_u)_{0 < u \leq t}\right) + c\left((I_u, X_u)_{0 < u \leq s}\right) \circ \theta_t$$

pour tous $s, t > 0$, où θ_t représente l'opérateur de décalage associé au processus markovien $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$.

On utilise alors le caractère régénératif du processus et, partant de l'état de marche parfaite $((1, 1), (0, 0, R))$, on note $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots$ les instants de renouvellement et $\alpha_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ la longueur du k -ième cycle ($k \geq 1$). On note aussi

$$Y_{k+1} = c\left((I_u, X_u)_{\tau_k < u \leq \tau_{k+1}}\right)$$

pour $k \geq 0$. On montre que $c_\infty = \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(\alpha_1)}$ de manière classique et on introduit les estimateurs empiriques suivants :

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k, \quad \bar{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Un estimateur naturel pour c_∞ est alors $c_n = \frac{\bar{Y}_n}{\bar{\alpha}_n}$, où $c_n \rightarrow \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(\alpha_1)} = c_\infty$ p.s. quand $n \rightarrow +\infty$. On construit ensuite un intervalle de confiance de niveau 95% pour c_∞ , qui n'est pas repris ici.

En ce qui concerne les calculs par la méthode de volumes finis, nous approximations les critères asymptotiques par les critères calculés à un instant t suffisamment grand pour qu'ils soient stabilisés (ici, $t = 50\,000\,h$). Ces calculs sont effectués à l'aide d'un schéma de type volumes finis implicite (un peu différent cependant de celui proposé au chapitre précédent, cf [P10] pour plus de détails). Notons que c'est en étudiant la convergence de ce schéma (qui n'est pas étudiée dans [P10]), que nous nous sommes aperçus qu'il fallait introduire un terme de viscosité pour pouvoir conclure, ce qui nous a amené à proposer le schéma implicite étudié au chapitre précédent.

Les résultats numériques obtenus sont cohérents entre les deux méthodes (Monte-Carlo et volumes finis). Les temps de calculs sont en revanche clairement à l'avantage de la méthode de volumes finis.

6.3 Facteurs d'importance (travail soumis)

[S1] Robert Eymard, Sophie Mercier, Michel Roussignol, Importance and sensitivity analysis in dynamic reliability, travail soumis en Juin 2008 à *Methodology and Computing in Applied Probability*.

Dans ce travail, nous nous intéressons à des études de sensibilité en fiabilité dynamique. Plus précisément, nous considérons un PDMP $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$,

dont les taux de transition $a(i, j, x)$, les lois de redistribution $\mu_{(i,j,x)}(dy)$ et les champs de vitesse $\mathbf{v}(i, x)$ dépendent de différents paramètres $p \in P$. Le problème est alors l'étude de la sensibilité de différentes quantités liées au PDMP par rapport à ces paramètres p . Les quantités d'intérêts sont de la forme

$$R_{\rho_0}(t) = \mathbb{E}_{\rho_0} \left(\int_0^t h(I_s, X_s) ds \right) = \int_0^t \rho_s h ds = \rho_0 \int_0^t P_s h ds$$

où h est une fonction mesurable bornée, qui peut aussi dépendre de p . L'étude de la sensibilité de $R_{\rho_0}(t)$ à p est faite au travers de la dérivée de $R_{\rho_0}(t)$ par rapport à p . Plus précisément, nous nous intéressons à la dérivée logarithmique renormalisée :

$$IF_p = \frac{p}{R_{\rho_0}(t)} \frac{\partial R_{\rho_0}(t)}{\partial p}, \tag{6.2}$$

que l'on appelle facteur d'importance dans $R_{\rho_0}(t)$ du paramètre $p \in P$. Cette quantité est sans dimension et peut permettre de classer les différents éléments de P en fonction de leur importance.

Pour mener cette étude à bien, nous partons des équations de Chapman-Kolmogorov vérifiées par la loi marginale du processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ (cf Chapitre 5). Ainsi que nous l'avons vu, ces équations forment un système d'équations différentielles hyperboliques linéaires du premier ordre, écrites sous forme faible. Pour calculer les dérivées $\frac{\partial R_{\rho_0}(t)}{\partial p}$, on peut alors se ramener à résoudre un problème dual, en suivant une démarche similaire à celle de (Lions, 1968), qui utilise ce type de méthodes pour une grande variété d'équations différentielles.

En plus des hypothèses générales \mathcal{H}_1 données au paragraphe 5.2, nous utilisons aussi les hypothèses suivantes notées \mathcal{H}_2 , où l'on rajoute (p) lorsque l'on souhaite insister sur la dépendance en p :

Pour chaque $p \in P$, il existe un ouvert O qui contient p et un voisinage $N(p)$ de p dans O tels que, pour tous $i, j \in E$:

- la fonction $(x, p) \mapsto a^{(p)}(i, j, x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^d \times N(p)$, continûment différentiable (de classe C^1) sur $\mathbb{R}^d \times O$, avec des dérivées partielles (d.p.) uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d \times N(p)$,
- pour toute fonction $f^{(p)}(x)$ bornée et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times O$, avec des d.p. uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d \times N(p)$, la fonction $(x, p) \mapsto \int f^{(p)}(y) \mu_{(i,j,x)}^{(p)}(dy)$ est bornée de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times O$, avec des d.p. uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d \times N(p)$,
- les fonctions $(x, p) \mapsto v^{(p)}(i, x)$ et $(x, p) \mapsto h^{(p)}(i, x)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^d \times N(p)$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times O$, avec des d.p. uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d \times N(p)$.

Nous utiliserons aussi des hypothèses \mathcal{H}_3 identiques aux hypothèses \mathcal{H}_2 , où C^1 est remplacé par C^2 (deux fois continûment différentiable). Sous \mathcal{H}_2 (resp. \mathcal{H}_3), la fonction $(x, p) \mapsto g^{(p)}(i, x, s)$ est de classe C^1 (resp. C^2) sur $\mathbb{R}^d \times O$, avec des d.p. uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d \times N(p)$, pour tout $i \in E$.

Notre problème est d'étudier la dérivabilité de $R_{\rho_0}^{(p)}(t)$ par rapport à p , ce qui revient à étudier la dérivabilité de $P_t^{(p)}h^{(p)}(i, x)$ par rapport à p . En partant des équations de Chapman-Kolmogorov vérifiées par $P_t^{(p)}h^{(p)}$ et en utilisant un théorème général donnant des propriétés de régularité de solutions d'équations différentielles, on obtient le résultat suivant :

Proposition 6.1 *Soit $f : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (indépendante de p) telle que, pour tout $i \in E$, la fonction $x \mapsto f(i, x)$ est bornée, de classe C^1 (resp. C^2) sur \mathbb{R}^d avec des d.p. uniformément bornées sur \mathbb{R}^d .*

Sous les hypothèses $\mathcal{H}_{1,2}$ (resp. $\mathcal{H}_{1,3}$), pour tout $i \in E$, la fonction $(x, p) \mapsto (P_t^{(p)}f)(i, x)$ est de classe C^1 (resp. C^2) sur $\mathbb{R}^d \times O$, avec des d.p. uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d \times N(p)$, pour tout $p \in O$.

En utilisant la forme explicite des probabilités de transition donnée dans [P7], la fonctionnelle $f \mapsto \frac{\partial}{\partial p} (P_t^{(p)}f)(i, x)$ apparaît comme une fonctionnelle linéaire continue qui implique f et les $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ pour $1 \leq k \leq d$. Si on restreint cette fonctionnelle à l'ensemble \mathcal{D} des fonctions f de classe C^∞ et à support compact, elle apparaît alors comme une distribution. L'ensemble \mathcal{D} étant trop restrictif pour notre étude, nous définissons cette fonctionnelle sur l'ensemble des fonctions bornées, de classe C^1 , avec des d.p. uniformément bornées et pour une telle fonction f , on pose :

$$\frac{\partial}{\partial p} (P_t^{(p)}f)(i, x) = \left\langle \frac{\partial P_t^{(p)}}{\partial p}, f \right\rangle(i, x)$$

pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 6.2 *Sous les hypothèses $\mathcal{H}_{1,2}$, la fonction $p \mapsto R_{\rho_0}^{(p)}(t)$ est continûment différentiable par rapport à p et*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} (R_{\rho_0}^{(p)}(t)) &= \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \frac{\partial P_u^{(p)}}{\partial p}, h^{(p)} \right\rangle(i, x) \rho_0(i, dx) du \\ &+ \int_0^t \sum_{i \in E} \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial p} h^{(p)}(j, y) P_u^{(p)}(i, x, j, dy) \rho_0(i, dx) du \\ &= \int_0^t \left\langle \frac{\partial \rho_u^{(p)}}{\partial p}, h^{(p)} \right\rangle du + \int_0^t \rho_u^{(p)} \frac{\partial h^{(p)}}{\partial p} du \end{aligned} \quad (6.3)$$

où l'on pose :

$$\left\langle \frac{\partial \rho_u^{(p)}}{\partial p}, h^{(p)} \right\rangle (i, x) = \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \frac{\partial P_u^{(p)}}{\partial p}, h \right\rangle (i, x) \rho_0(i, dx)$$

pour tout $(i, x, u) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

Le problème est maintenant de calculer cette dérivée. Pour cela, nous utilisons les générateurs infinitésimaux de $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ et de $(I_t, (X_t, t))_{t \geq 0}$, que nous notons $H_0^{(p)}$ et $H^{(p)}$, respectivement. Rappelons (cf § 5.3) que D_0 est l'ensemble des fonctions $f : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C_1 et bornées telles que $\mathbf{v}^{(p)}(i, \cdot) \cdot \nabla f(i, \cdot)$ est continue bornée pour tout $i \in E$. Pour $f \in D_0$, $H_0^{(p)} f$ est défini par (5.3). Soit maintenant D_1 l'ensemble des fonctions $f : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $i \in E$, la fonction $(x, s) \mapsto f(i, x, s)$ est bornée de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ et telle que la fonction $(x, s) \mapsto \frac{\partial f}{\partial s}(i, x, s) + \mathbf{v}^{(p)}(i, x) \cdot \nabla f(i, x, s)$ est bornée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Pour $f \in D_1$, on définit

$$\begin{aligned} H^{(p)} f(i, x, s) &= \sum_j a^{(p)}(i, j, x) \int f(j, y, s) \mu_{(i, j, x)}^{(p)}(dy) + \frac{\partial f}{\partial s}(i, x, s) \\ &\quad + \mathbf{v}^{(p)}(i, x) \cdot \nabla f(i, x, s) \end{aligned} \quad (6.4)$$

pour tout $(i, x, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

Nous introduisons maintenant ce que l'on appelle la fonction d'importance associée à la fonction $h^{(p)}$ et à t , et qui est définie par :

$$\varphi_t^{(p)}(i, x, s) = \begin{cases} - \int_0^{t-s} \left(P_u^{(p)} h^{(p)} \right) (i, x) du & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.5)$$

pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$.

Sous $\mathcal{H}_{1,2}$, on montre que la fonction d'importance $\varphi_t^{(p)}$ associée à $(h^{(p)}, t)$ est l'unique élément de D_1 tel que :

- $\varphi_t^{(p)}$ est solution de l'équation différentielle

$$H^{(p)} \varphi_t^{(p)}(i, x, s) = h^{(p)}(i, x) \quad (6.6)$$

pour tout $(i, x, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times [0, t[$,

- $\varphi_t^{(p)}(i, x, t) = 0$ pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$.

Sous $\mathcal{H}_{1,3}$, on montre aussi que

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial \rho_s^{(p)}}{\partial p}, H^{(p)} \varphi_t^{(p)}(\cdot, \cdot, s) \right\rangle ds = - \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial H^{(p)}}{\partial p} \varphi_t(\cdot, \cdot, s) ds,$$

où l'on pose :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^{(p)}}{\partial p} \varphi(i, x, s) &:= \sum_{j \in E} \frac{\partial a^{(p)}}{\partial p}(i, j, x) \int \varphi(j, y, s) \mu_{(i,j,x)}^{(p)}(dy) \\ &+ \sum_{j \in E} a^{(p)}(i, j, x) \frac{\partial}{\partial p} \left(\int \varphi(j, y, s) \mu_{(i,j,x)}^{(p)}(dy) \right) \\ &+ \frac{\partial v^{(p)}}{\partial p}(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x, s) \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in D_1$ et tout $(i, x, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Ceci permet de donner une nouvelle expression pour $\frac{\partial R_{\rho_0}^{(p)}}{\partial p}(t)$:

Théorème 6.3 *Sous les hypothèses $\mathcal{H}_{1,3}$, on a :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\rho_0}^{(p)}}{\partial p}(t) &= \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial h^{(p)}}{\partial p} ds - \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial H^{(p)}}{\partial p} \varphi_t^{(p)}(\cdot, \cdot, s) ds \\ &= \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial h^{(p)}}{\partial p} ds + \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial H^{(p)}}{\partial p} \left(\int_0^{t-s} P_u^{(p)} h^{(p)} du \right) ds. \end{aligned} \quad (6.7)$$

La formule (6.7) est une extension aux PDMP des résultats que (Gandini, 1990) avait obtenu pour des processus de Markov de sauts à espace d'état fini.

Dans le Théorème 6.3, cette formule n'est écrite que pour un seul paramètre p . Lorsque $R_{\rho_0}(t)$ dépend d'une famille de paramètres $P = (p_l)_{l \in L}$, on a alors :

$$\frac{\partial R_{\rho_0}^{(P)}}{\partial p_l}(t) = \int_0^t \rho_s^{(P)} \frac{\partial h^{(P)}}{\partial p_l} ds - \int_0^t \rho_s^{(P)} \frac{\partial H^{(P)}}{\partial p_l} \varphi_t^{(P)}(\cdot, \cdot, s) ds$$

pour tout $l \in L$. Le calcul numérique des $\frac{\partial R_{\rho_0}^{(P)}}{\partial p_l}(t)$ pour tout $l \in L$ nécessite le calcul de $\rho_s^{(P)}(i, dx)$ et de $\varphi_t^{(P)}(i, x, s)$, qui sont indépendants de $l \in L$, ainsi qu'une intégration pour chaque valeur de $l \in L$. Les calculs sont ici effectués par méthodes de volumes finis. Pour calculer les $\frac{\partial R_{\rho_0}^{(P)}}{\partial p_l}(t)$ pour tout $l \in L$, on résoud un premier schéma qui fournit $\rho_s^{(P)}(i, dx)$ (cf Chapitre 5), et un deuxième schéma, dual du premier (cf (6.6)), pour obtenir $\varphi_t^{(P)}(i, x, s)$. Les sommations correspondant à chaque valeur de $l \in L$ sont par ailleurs effectuées simultanément.

Ces calculs sont à rapprocher de ceux nécessaires à la méthode usuelle de différences finies, pour laquelle

$$\frac{\partial R_{\rho_0}^{(P)}}{\partial p_l}(t) \simeq \frac{1}{\varepsilon} \left(R_{\rho_0}^{(P_\varepsilon^l)} - R_{\rho_0}^{(P)} \right)$$

pour $\varepsilon > 0$ petit et où P_ε^l représente la famille P avec p_l remplacé par $p_l + \varepsilon$. Le calcul numérique des $\frac{\partial R_{\rho_0}^{(P)}}{\partial p_l}(t)$ pour $l \in L$ nécessite alors un premier calcul de $\rho_s^{(P)}(i, dx)$ commun à tous les $l \in L$, et un autre calcul de $\rho_s^{(P_\varepsilon^l)}(i, dx)$ pour chaque valeur de $l \in L$. Cette méthode nécessite donc $\text{card}(L) + 1$ calculs de lois marginales. Lorsque le nombre de paramètres est grand, l'avantage est clairement à la méthode présentée ici.

Nous nous intéressons ensuite aux quantités asymptotiques unitaires (par unité de temps) de la forme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \frac{\partial R_{\rho_0}^{(p)}}{\partial p}(t)$. Nous avons besoin pour cela d'hypothèses supplémentaires, notées \mathcal{H}_4 :

- le processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ est Harris-récurrent positif, avec $\pi^{(p)}$ comme unique loi stationnaire,
- le processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément ergodique, au sens où, pour chaque $p \in O$, il existe une fonction $f^{(p)}$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f^{(p)}(u) du < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} u f^{(p)}(u) du < +\infty, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} f^{(p)}(u) = 0,$$

et

$$\left| \left(P_u^{(p)} h^{(p)} \right) (i, x) - \pi^{(p)} h^{(p)} \right| \leq f^{(p)}(u)$$

pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$ et tout $u \geq 0$.

Afin de limiter un peu la technicité, on suppose maintenant que seuls les taux de transition $a^{(p)}(i, j, x)$ et la fonction $h^{(p)}$ dépendent de p .

Partant de (6.7), on montre facilement que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \frac{\partial R_{\rho_0}^{(p)}}{\partial p}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial h^{(p)}}{\partial p} ds \\ &+ \frac{1}{t} \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial H^{(p)}}{\partial p} \left(\int_0^{t-s} \left(P_u^{(p)} h^{(p)} - \pi^{(p)} h^{(p)} \right) du \right) ds. \end{aligned}$$

On introduit maintenant ce que l'on appelle la fonction potentiel associée à la fonction $h^{(p)}$, et qui est définie par :

$$Uh^{(p)}(i, x) := \int_0^{+\infty} \left(\left(P_u^{(p)} h^{(p)} \right) (i, x) - \pi^{(p)} h^{(p)} \right) du \quad (6.8)$$

pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$.

Si $\mu_{(i,j,x)}$ et $\mathbf{v}(i, x)$ sont indépendants de p et sous les hypothèses $\mathcal{H}_{1,3,4}$, on montre que $Uh^{(p)}$ est bien définie et appartient à D_0 . La fonction potentiel $Uh^{(p)}$ est par ailleurs solution de l'équation différentielle :

$$H_0^{(p)}Uh^{(p)}(i, x) = \pi^{(p)}h^{(p)} - h^{(p)}(i, x) \quad (6.9)$$

pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$. Les autres solutions de cette équation différentielle sont de la forme $Uh^{(p)} + C$, où C est une constante.

On obtient maintenant le théorème suivant, qui fournit une extension aux PDMP des résultats de (Cao et Chen, 1997), donnés pour des processus de Markov de sauts à espace d'états fini.

Théorème 6.4 *Supposons $\mu_{(i,j,x)}$ et $\mathbf{v}(i, x)$ indépendants de p et les hypothèses $\mathcal{H}_{1,3,4}$ vérifiées. Dans ce cas, la limite suivante existe et vaut :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \frac{\partial R_{\rho_0}^{(p)}}{\partial p}(t) = \pi^{(p)} \frac{\partial h^{(p)}}{\partial p} + \pi^{(p)} \frac{\partial H_0^{(p)}}{\partial p} Uh^{(p)} \quad (6.10)$$

où l'on pose :

$$\frac{\partial H_0^{(p)}}{\partial p} \varphi_0(i, x) := \sum_{j \in E} \frac{\partial a^{(p)}}{\partial p}(i, j, x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0(j, y) \mu_{(i,j,x)}(dy)$$

pour tout $\varphi_0 \in D_0$ et tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$.

De la même façon que dans le cas transitoire, les calculs asymptotiques nécessitent le calcul de la loi asymptotique $\pi^{(p)}(i, dx)$ et de la fonction potentiel $Uh^{(p)}(i, x)$ (à l'aide de (6.9)). Dans le cas d'un ensemble $P = (p_l)_{l \in L}$ de paramètres, ces calculs ne sont effectués qu'une seule fois pour tout $l \in L$. Dans le cas où $\text{card}(L)$ est grand, cela donne là encore l'avantage à la méthode présentée ici par rapport aux différences finies.

Dans [S1], nous présentons ensuite les méthodes de type volumes finis que nous utilisons pour calculer les différentes dérivées. Partant du schéma implicite présenté au Chapitre 5, ces méthodes consistent à traduire dans un cadre discret la méthodologie établie dans un cadre continu. (Nous introduisons ainsi des fonctions d'importance et potentiel de type discret). Les procédures discrètes utilisées sont données dans [S1] avec de simples indications de démonstration.

Nous terminons ensuite [S1] en donnant deux exemples d'utilisation, pour lequel nous vérifions les conditions d'applicabilité de nos résultats, et en particulier l'uniforme ergodicité contenue dans l'hypothèse \mathcal{H}_4 .

6.4 Thèse de Margot Desgrouas

[Thèse] Desgrouas, M. (2007). *Comportement asymptotique de processus utilisés en fiabilité dynamique*. Thèse de doctorat, soutenue le 30 janvier 2007 à l'Université de Marne-la-Vallée.

[CI12] Qualita 2005, Bordeaux, 16-18 mars 2005, Margot Desgrouas, Sophie Mercier, Comportement asymptotique d'un exemple de fiabilité dynamique (8 pages).

[CI14] Congrès Lambda-Mu 15, Lille, octobre 2006, Margot Desgrouas, Christiane Cocozza, Sophie Mercier, Algorithme de calcul de disponibilité asymptotique en fiabilité dynamique (8 pages).

Remarque : Margot Desgrouas-Martins travaille depuis fin 2006 (avant la fin de sa thèse) pour la société LGM, dans le Pôle Ingénierie système, Ingénierie de maintenance et Sécurité de Fonctionnement (fiabilité, testabilité, sécurité).

Les travaux de thèse de Margot Desgrouas portent sur l'étude théorique du comportement asymptotique des PDMP (existence et unicité d'une loi stationnaire, convergence), ainsi que sur l'évaluation numérique des critères asymptotiques associés.

Dans un premier temps, Margot Desgrouas a étudié sur un petit exemple simple, diverses méthodes théoriques proposées dans la littérature par (Davis, 1993), (Costa, 1990) et (Dufour et Costa, 1999). Ces méthodes ramènent l'étude de la loi stationnaire d'un PDMP à celle de différentes chaînes de Markov immergées. Elles donnent en particulier des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de lois invariantes pour un PDMP mais n'abordent pas le problème de la convergence vers la loi stationnaire. (Notons que (Costa et Dufour, 2008) a depuis comblé cette lacune). Par ailleurs, leur mise en œuvre s'est avérée très lourde, même sur un exemple très simple.

Margot Desgrouas s'est alors tournée vers d'autres techniques, et a montré, tout d'abord sur le même exemple simple, que le processus étudié avait un point de régénération. Ceci lui a permis d'obtenir, d'une part, l'existence et l'unicité de la loi stationnaire, d'autre part, la convergence de différents critères fiabilistes (moyennés ou non en temps) vers les quantités asymptotiques correspondantes.

Margot Desgrouas a ensuite étudié le caractère régénératif des PDMP dans un sens plus général, à l'aide en particulier de la notion de Harris récurrence. Lorsque l'espace des variables continues est de dimension 1, les conditions (suffisantes) obtenues semblent plutôt satisfaisantes. Lorsque l'espace environnemental est de dimension supérieure, ces conditions semblent un peu trop restrictives et pourraient sans doute être quelque peu affinées.

Margot Desgrouas s'est ensuite intéressée à l'évaluation numérique des critères asymptotiques, qui s'expriment à l'aide de la loi stationnaire du PDMP (lorsque celle-ci existe et est unique). Partant de la caractérisation de la loi stationnaire à l'aide du générateur du PDMP, Robert Eymard lui a alors proposé un algorithme de type volumes finis, permettant d'approximer cette loi stationnaire. Margot Desgrouas a démontré la convergence de cet algorithme lorsque l'espace des variables continues est de dimension 1 et borné.

Enfin, elle a appliqué ses résultats (existence d'une loi stationnaire, convergence vers cette loi, calcul numérique) à de petits exemples issus de la fiabilité classique, que l'on ne savait pas traiter auparavant sinon par simulation de Monte-Carlo.

6.5 Conclusion - Perspectives

En ce qui concerne le premier travail présenté ici (§6.2), il s'agissait simplement de montrer l'applicabilité des méthodes développées dans le chapitre précédent à un cas concret proposé par des industriels. Nous ne pouvons donc qu'espérer qu'il ait atteint son but... Les méthodes de volumes finis sont cependant parfois lourdes à programmer. On peut donc penser que, pour que ces méthodes soient réellement utilisées en pratique, il serait bon de fournir une aide aux industriels, par exemple en développant un logiciel paramétrable, qui permettrait de traiter un certain nombre de cas usuels en fiabilité dynamique. Notons que ce type de logiciel pourrait aussi être utile pour traiter certains petits exemples usuels de fiabilité classique qui peuvent être décrits à l'aide de PDMP, mais pas nécessairement à l'aide des processus habituellement utilisés par les industriels (deux composants en parallèle ayant des taux de panne et de réparations non constants par exemple), cf [CI10].

Le deuxième travail présenté ici (§6.3) permet de réduire le calcul des facteurs d'importance de divers paramètres dans une quantité donnée à celui des fonctions d'importance et potentiels (en plus de l'évaluation initiale des lois marginales, nécessaires au calcul de la quantité étudiée). Lorsque les paramètres sont nombreux, ceci donne clairement l'avantage à la méthode présentée ici par rapport aux différences finies. Même si les fonctions d'importance et potentiels peuvent clairement être calculées par d'autres méthodes (simulation de Monte-Carlo par exemple), les formulations obtenues ici s'adaptent cependant très bien aux méthodes de type volumes finis présentées précédemment. En effet, les schémas à résoudre pour obtenir les fonctions d'importance et potentiels, que nous n'avons pas donnés ici, s'écrivent très simplement en fonction du schéma fournissant la loi marginale du PDMP, ce qui simplifie considérablement la programmation et donne un autre atout à la méthode.

En ce qui concerne le travail effectué par Margot Desgrouas (§6.4), il ne constitue clairement qu'une petite pierre sur un vaste sujet, et montrer la Harris récurrence d'un PDMP reste souvent une tâche ardue. Les résultats de Margot Desgrouas ont cependant le mérite de permettre de conclure très rapidement pour quelques cas simples. Sur le même sujet, (Costa et Dufour, 2008) ont récemment complété le travail qu'ils avaient commencé dans (Dufour et Costa, 1999), en exploitant à nouveau le lien entre un PDMP et une chaîne de Markov immergée, de noyau noté G . Ils obtiennent en particulier des équivalences concernant l'irréductibilité, l'existence de mesures invariantes et la récurrence du PDMP et de la chaîne de Markov immergée. Différents critères de type Foster-Lyapunov portant sur G sont aussi donnés, qui assurent la Harris récurrence et l'ergodicité du PDMP. Ces travaux constituent clairement un grand pas en avant pour l'étude de la Harris récurrence d'un PDMP, et ceci dans le cadre général de (Davis, 1993), avec des sauts éventuels à la frontière du domaine. Notons cependant que, comme Margot Desgrouas l'avait remarqué dans sa thèse, le noyau G utilisé, qui dépend des trajectoires $t \mapsto g(i, x, t)$ du PDMP, n'est pas toujours explicite, de sorte que l'utilisation de ces critères n'est pas nécessairement immédiate en pratique. Une autre piste pourrait alors être d'utiliser des critères de type Foster-Lyapunov portant cette fois-ci sur le générateur du PDMP, et non pas sur le noyau G . On peut à ce titre consulter les travaux de (Costa et Dufour, 2006), qui se situent dans la lignée de (Meyn et Tweedie, 1993a, 1993b). Dans ces travaux, les auteurs donnent un nouveau critère de type Foster-Lyapunov portant sur le générateur, qu'ils montrent être équivalent à l'existence d'une probabilité invariante pour des processus de Markov très généraux, et en particulier pour des PDMP. A la lumière de ces travaux, le problème reste alors d'étudier l'unicité de la probabilité invariante, ou encore la φ -irréductibilité du processus. Ceci mérite sans doute d'être regardé de façon approfondie dans le cadre des PDMP.

Une autre extension possible des travaux de Margot Desgrouas concerne l'étude de schémas de volumes finis pour la loi stationnaire (sous hypothèse d'existence et d'unicité). La démonstration de la convergence du schéma n'a en effet été effectuée que dans un cas particulier, et demanderait donc à être complétée. On pourrait aussi imaginer un schéma de type volumes finis dans le cadre général de (Davis, 1993), avec des sauts éventuels à la frontière.

Chapitre 7

Conclusion, Travaux en cours, Projets

7.1 Conclusion

Tout-au-long de ce document, j'ai présenté mes divers travaux et essayé d'esquisser quelques perspectives de recherche, qui sont autant de pistes pour poursuivre les travaux effectués. Un certain nombre de ces perspectives correspondent à des projets que je souhaiterais mener à bien dès que possible, et notamment l'évaluation numérique de PDMP par encadrement, la poursuite des travaux concernant les composants obsolètes, ainsi que ceux de Margot Desgrouas concernant l'évaluation asymptotique des PDMP par méthode de volumes finis, en collaboration avec Robert Eymard. Ces perspectives ne sont pas reprises ici. Nous donnons en revanche un aperçu sur quelques travaux en cours et autres projets dont nous n'avons pas parlé auparavant, les uns et les autres étant à des stades divers d'avancement.

7.2 Processus Gamma bivariés

Le sujet présenté ici correspond à un travail en cours et est en collaboration avec Michel Roussignol.

Une manière classique de décrire la dégradation aléatoire (croissante) d'un composant est de modéliser son usure à l'aide d'un processus Gamma univarié. Lorsque l'on s'intéresse à deux indicateurs d'usure différents sur un même composant, ou à un indicateur d'usure donné pour deux composants différents soumis à des contraintes communes, il est alors naturel de modéliser l'évolution de ces deux indicateurs par un processus bivarié dont les processus marginaux sont de type Gamma univariés, encore appelé processus Gamma bivariés. L'objet de cette étude est de voir comment construire de tels processus, de façon à ce que la dépendance entre processus marginaux

soit cohérente avec un modèle de dégradation bivariée, ainsi que d'étudier ces processus.

D'un point de vue applicatif, il semble souhaitable que les processus marginaux soient corrélés positivement, dans le sens où grosso modo, de grandes valeurs pour l'un doivent correspondre à de grandes valeurs pour l'autre. Comme l'ont montré (Bäuerle *et al.*, 2007), on sait que ce type de dépendance positive peut être décrite par un processus de Lévy à valeurs dans \mathbb{R}_+^2 . Nous nous concentrons donc ici sur ce type de processus, à savoir des processus de Lévy sur \mathbb{R}_+^2 , ayant pour marginales des processus Gamma, que nous appelons processus Gamma-Lévy (bivarié).

Pour un composant dont la dégradation est modélisée par un processus gamma univarié, on considère généralement que sa durée de vie correspond à l'atteinte d'un seuil pour le processus. Dans ce cas, (Shaked et Shanthikumar, 1988) ont montré que la durée de vie du composant est vieillissante (IFR), ce qui est une propriété souhaitable en fiabilité. Dans le cas d'un processus Gamma-Lévy bivarié, on obtient ici des propriétés similaires. Par exemple, si \mathcal{U} est un ensemble clos vers le haut (upper set), on montre que le temps d'atteinte de \mathcal{U} est NBU (New Better Than Used) univarié et que si \mathcal{U} est de la forme $\mathcal{U} = [K_1, +\infty[\times [K_2, +\infty[$, alors $(T_{K_1}^{(1)}, T_{K_2}^{(2)})$ est NBU bivarié. Le choix d'un processus Gamma-Lévy semble donc, de ce point de vue, bien adapté aux propriétés désirées pour un processus de dégradation bivarié.

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de dépendance existant entre les processus marginaux d'un processus Gamma-Lévy que nous notons $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$, où $X_i(t)$ suit la loi $\Gamma(a_i t, b_i)$ avec $a_i, b_i > 0$ pour $i = 1, 2$. Pour un tel processus, on montre que le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X(t)}$ entre $X_1(t)$ et $X_2(t)$ est indépendant de t et vérifie nécessairement :

$$0 \leq \rho_{X(t)} \leq \rho_{\max}(\alpha) := \iint_{\mathbb{R}_+^2} \min\left(\sqrt{\alpha} E_1(u_1), \frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_1(u_2)\right) du_1 du_2 \quad (7.1)$$

où $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ et où E_1 est la fonction exponentielle intégrale définie par

$$E_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

pour $x > 0$. La borne de droite peut par ailleurs être atteinte. D'autres mesures de dépendance pourraient certainement être étudiées de la même façon. On peut aussi utiliser les copules de Lévy introduites dans (Cont et Tankov, 2004), dont on sait qu'elles décrivent complètement la dépendance des processus marginaux. On obtient ainsi des bornes atteignables pour la copule de Lévy associée à $(X(t))_{t \geq 0}$. Le problème est alors de voir

comment construire un processus Gamma-Lévy qui permette de balayer au mieux les différents types de dépendance possibles.

Une première construction est donnée par un modèle trivarié, pour lequel $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ est de la forme

$$\begin{cases} X_1(t) = Y_1(t) + Y_3(t) \\ X_2(t) = Y_2(t) + Y_3(t) \end{cases}$$

pour tout $t \geq 0$, où $(Y_i(t))_{t \geq 0}$ pour $i = 1, 2, 3$ représentent trois processus Gamma (univariés) indépendants. Un premier intérêt d'une telle modélisation réside dans la facilité d'interprétation des différents processus $Y_i(t)$: si $X(t)$ représente la dégradation de deux composants soumis à un même environnement stressant, $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ correspondent à des dégradations intrinsèques des deux composants, alors que $Y_3(t)$ correspond à une dégradation commune, provenant de l'environnement commun. Un autre intérêt de cette modélisation est sa simplicité, qui permet d'avoir accès explicitement à la loi de $X(t)$, et de pouvoir facilement simuler le processus et faire des ajustements statistiques. En étudiant les corrélations possibles entre $X_1(t)$ et $X_2(t)$, on s'aperçoit cependant que cette modélisation est trop restrictive et qu'elle ne permet pas de décrire tous les types de dépendance. Ainsi, on peut par exemple vérifier que $\rho_{X(t)}$ est tel que :

$$0 \leq \rho_{X(t)} \leq \rho_{\max}^{(T)}(\alpha) := \min\left(\sqrt{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

avec $\rho_{\max}^{(T)}(\alpha) < \rho_{\max}(\alpha)$ pour $\alpha \neq 1$, où $\rho_{\max}(\alpha)$ est défini dans (7.1). On obtient des résultats similaires pour la copule de Lévy associée à un modèle trivarié, avec là-encore des bornes plus restrictives que les bornes maximales théoriques. Pour des dépendances fortes, ce type de modèle ne peut donc pas convenir.

Une deuxième construction possible est de considérer une copule de Lévy paramétrique, comme par exemple celle de Clayton-Lévy, associée à un unique paramètre $\theta > 0$, cf (Cont et Tankov, 2004). Ceci conduit à une mesure de Lévy pour $(X(t))_{t \geq 0}$ de la forme :

$$\begin{aligned} \mu(dy_1, dy_2) &= a_1 a_2 (1 + \theta) \left((a_1 E_1(y_1))^{-\theta} + (a_2 E_1(y_2))^{-\theta} \right)^{-\frac{1}{\theta} - 2} \\ &\times (a_1 E_1(y_1))^{-\theta - 1} (a_2 E_1(y_2))^{-\theta - 1} \frac{e^{-y_1}}{y_1} \frac{e^{-y_2}}{y_2} dy_1 dy_2 \quad (7.2) \end{aligned}$$

L'intérêt de la copule de Clayton-Lévy est qu'elle permet de modéliser des dépendances allant de l'indépendance à la dépendance complète (et donc des coefficients de corrélation variant de 0 à $\rho_{\max}(\alpha)$). Le paramètre θ est par ailleurs un indicateur de la dépendance au sens où, plus θ est grand, plus forte

est la dépendance et plus $(X_t)_{t \geq 0}$ est grand selon l'ordre pour la concordance, cf (Bäuerle *et al.*, 2007). L'estimation de θ et des paramètres des processus marginaux est aisée, par exemple par une méthode de moments. Un tel modèle est aussi facile à simuler à l'aide du théorème de représentation en série de Rosinski, cf (Cont et Tankov, 2004). La loi de $X(t)$ n'est en revanche pas connue explicitement. Au vu de (7.2), une interprétation physique des sauts du processus ne semble par ailleurs pas très aisée. On pourrait alors regarder d'autres types de copules paramétriques, avec cependant le risque d'avoir le même type de restrictions.

Une troisième construction possible est de considérer les mesures de Lévy $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$ et $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$ correspondant respectivement à l'indépendance et à la dépendance complète, avec

$$\begin{aligned}\mu_{\perp}(dx_1, dx_2) &= \mu_1(dx_1) \times \delta_0(dx_2) + \delta_0(dx_1) \times \mu_2(dx_2) \\ \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2) &= \mu_1(dx_1) \times \delta_{U_2^{-1}(U_1(x_1))}(dx_2) = \delta_{U_1^{-1}(U_2(x_2))}(dx_1) \times \mu_2(dx_2)\end{aligned}$$

où, pour $i = 1, 2$, $\mu_i(dx_i) = \frac{a_i}{x_i} e^{-x_i} dx_i$ est la mesure de Lévy du processus $(X_i(t))_{t \geq 0}$ et où

$$U_i(x_i) = \int_{x_i}^{+\infty} \mu_i(du_i) = a_i E_1(x_i)$$

pour $x_i \in \mathbb{R}_+$.

En posant

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \rho) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \rho \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où $\rho \in [0, 1]$, on obtient alors un nouveau processus Gamma-Lévy pour lequel ρ est le coefficient de corrélation linéaire de X_t . L'intérêt de cette modélisation est que la signification du paramètre de dépendance (ρ) est claire et que l'estimation des différents paramètres est, là encore, très facile. La loi de X_t n'est en revanche pas disponible explicitement. La méthode de simulation de Monte-Carlo utilisée pour le deuxième modèle ne fonctionne par ailleurs plus ici (en tout cas pas directement), car elle repose sur l'inversibilité de la copule de Clayton-Lévy par rapport à l'une de ses variables (l'autre étant fixée), qui n'est plus vraie ici. Un travail reste donc à faire pour étudier les propriétés de ce modèle et voir en particulier, comment le simuler ou plus généralement, comment l'évaluer numériquement. (On peut peut-être imaginer utiliser des méthodes de type volumes finis en partant du générateur du processus markovien $(X(t))_{t \geq 0}$ (?)).

7.3 Co-encadrement d'une thèse CIFRE à la SNCF

Les acteurs de ce projet sont :

Sophie Mercier

- William Lair, étudiant de deuxième année du Master Recherche de Mathématiques à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, spécialité Mathématique et Applications, option Fiabilité,
- Rachid Ziani, ingénieur de recherche à la Direction de l'Innovation et de la Recherche de la SNCF (Unité Génie Décisionnel Appliqué),
- Michel Roussignol, professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, et moi-même.

William Lair effectue actuellement son stage de deuxième année de Master à la SNCF, sous la direction de Rachid Ziani, Michel Roussignol et de moi-même. Si tous les partenaires en sont d'accord, ce stage devrait se poursuivre par une thèse en Convention Industrielle de Formation par la REcherche (CIFRE), avec les mêmes acteurs.

Le sujet de stage de William Lair porte sur l'étude de deux systèmes appartenant à l'infrastructure ferroviaire : les circuits de voie, ainsi que les poteaux caténaires. Le bon fonctionnement de tels systèmes est en effet fondamental pour la SCNF, car il influe directement sur deux points cruciaux : la sécurité et la ponctualité. Ces systèmes comportent environ une dizaine de composants pour la plupart indépendants, dont certains sont vieillissants. Le but du stage est de modéliser la durée de vie de ces deux systèmes, de proposer différentes politiques de maintenance préventive et de les optimiser.

Afin de réaliser ceci, diverses étapes sont nécessaires : en premier lieu, il s'agit de faire une analyse des durées de vie des différents composants (estimation paramétrique et non paramétrique de la fonction de fiabilité) et de s'approprier certains résultats d'études antérieures ; en second lieu, des avis d'experts doivent être recueillis afin de bien comprendre le fonctionnement des systèmes ; en troisième lieu, une modélisation probabiliste de la durée de vie des systèmes doit être proposée, ce que nous envisageons de faire de diverses façons, et en particulier à l'aide de PDMP ; enfin, des politiques de maintenance préventive doivent être proposées et optimisées, ce qui nécessite de mettre en place des procédures numériques.

Le sujet de la thèse est dans la lignée de ce stage et porte elle aussi sur la modélisation de la durée de vie de différents systèmes et sur l'optimisation de leur maintenance. Les systèmes envisagés sont en revanche plus complexes (passage à niveau par exemple), et des dépendances devront sans doute être étudiées. L'intérêt du stage est de préparer William Lair à l'étude de ces systèmes complexes en l'initiant aux différentes techniques que nous envisageons d'utiliser pour sa thèse, qu'elles soient statistiques (avec l'estimation de durées de vie), probabilistes (avec la modélisation à l'aide de PDMP) ou numériques, avec l'évaluation quantitative de critères d'optimisation de maintenance, que ce soit par méthodes de volumes finis ou par simulation de Monte-Carlo.

7.4 Projet de livre

Nous avons aussi, avec Robert Eymard et Michel Roussignol, un projet de livre chez Springer, dans la collection *Springer Series on Reliability Engineering*. L'idée de cet ouvrage nous a été proposée par Anthony Doyle, Senior Editor – Engineering, Springer, suite à la lecture de [P10]. Si ce projet se réalise, cet ouvrage sera consacré aux méthodes numériques en fiabilité dynamique. Un premier projet de plan et d'introduction a déjà été fait, et devrait être envoyé très prochainement à l'éditeur.

En ce qui concerne le contenu, l'idée est d'essayer de faire une présentation simple des processus de Markov déterministes par morceaux, qui mette en évidence leur puissance de modélisation, ainsi que de proposer des outils pour leur évaluation numérique. De nombreux exemples illustreront notre propos, qui seront étudiés au fil de l'ouvrage. D'un point de vue méthodes numériques, nous parlerons de simulations de Monte-Carlo, de méthodes d'encadrement et de méthodes de type volumes finis, cette dernière partie étant appelée à être la plus développée. Nous parlerons aussi de facteurs d'importance et de leur évaluation numérique, ainsi que du calcul numérique de quantités asymptotiques. Notons que certains points de ce programme en sont encore au stade embryonnaire (encadrement de PDMP par exemple) et nécessiteront un travail complémentaire de recherche.

7.5 Projet ANR

Robert Eymard et moi-même sommes aussi parties prenantes dans un projet ANR intitulé Infections Nosocomiales et Modèles Epidémiques, qui a été déposé en mars dernier. Ce projet est porté par Pierre Magal (Université du Havre), Dominique Pontier (Université Claude Bernard Lyon I) et Philippe Vanhems (Hôpital Edouard Herriot, Hospices Civils de Lyon) et se situe dans le cadre de l'appel à projets « Maladies infectieuses et leur environnement ». Son objectif est de construire un outil d'aide à la décision permettant d'évaluer l'impact de traitements antibiotiques dans le contexte de la lutte contre les infections nosocomiales au sein du milieu hospitalier. A terme, cet outil devrait permettre de comprendre la dynamique d'acquisition d'infections du type de celles dues à *Staphylococcus aureus*, sensible et résistant à la méticilline, dans un hôpital universitaire et dans un centre hospitalier régional.

La participation à ce projet nous a été proposée, à Robert Eymard et à moi-même, par Dominique Pontier, responsable de la partie modélisation probabiliste et étude statistique du projet. Le but de cette partie est d'aider à la compréhension, d'une part de l'hétérogénéité des comportements individuels face aux bactéries résistantes, d'autre part de la dynamique de transmission des bactéries résistantes. Pour ce faire, deux types de modélisation

stochastiques sont envisagées : un premier modèle (modèle agrégatif) décrit l'évolution globale de la population, lorsque celle-ci est divisée en classes représentant différents types d'individus (sains, infectés, jeunes, adultes, patients des urgences...). L'idée est ici d'utiliser un processus markovien de sauts à espace d'états finis donnant à chaque instant l'effectif de chaque classe. Un deuxième modèle (IBM : Individual Based Model) décrit quant à lui l'évolution d'un individu (sain, infecté, ...) au sein d'un environnement aléatoire, là encore, à l'aide d'un processus markovien de sauts. Dans les deux cas, les taux de transition dépendent de covariables, les unes liées au patient pour le modèle IBM (âge, lieu de séjour à l'hôpital, ...) ou à l'environnement aléatoire (nombre de personnes infectées pour le modèle IBM ou règles d'hygiène à l'hôpital pour le modèle agrégatif par exemple). Cette modélisation nécessite une première analyse des données afin d'identifier des covariables influentes. Il s'agira ensuite d'ajuster les modèles proposés aux données et de tester leur adéquation, ainsi que d'utiliser des méthodes de sélection de modèles afin de ne retenir que les plus pertinents.

Liste des travaux

Articles parus ou acceptés

- [P1] Sophie Bloch-Mercier (2000), Stationary availability of a semi-Markov system with random maintenance, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 16(3), pp. 219-234.
- [P2] Sophie Bloch-Mercier (2001), Monotone Markov processes with respect to the reversed hazard rate ordering : an application to reliability, *Journal of Applied Probability*, 38 (1), pp. 195-208.
- [P3] Sophie Bloch-Mercier (2001), Optimal restarting distribution after repair for a Markov deteriorating system, *Reliability Engineering and System Safety*, 74(2), pp. 181-191.
- [P4] Sophie Bloch-Mercier (2002), A preventive maintenance policy with sequential checking procedure for a Markov deteriorating system, *European Journal of Operational Research*, 147(3), pp. 548-576.
- [P5] Sophie Mercier, Michel Roussignol (2003), Asymptotic failure rate of a Markov deteriorating system with preventive maintenance, *Journal of Applied Probability*, 40 (1), pp. 1-19.
- [P6] Sophie Mercier, Pierre-Etienne Labeau (2004), Optimal replacement policy for a series system with obsolescence, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 20 (1), pp. 73-91, published online 10 Feb 2004.
- [P7] Christiane Coccozza-Thivent, Robert Eymard, Sophie Mercier, Michel Roussignol (2006) Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, Volume 2006, Article ID 92156, pp. 1-18.
- [P8] C. Coccozza-Thivent, R. Eymard, S. Mercier (2006) A finite volume scheme for dynamic reliability models, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26(3), pp. 446-471.

- [P9] Sophie Mercier (2007) Discrete random bounds for general random variables and applications to reliability, *European Journal of Operational Research*, Volume 177, Issue 1, Feb. 2007, pp. 378-405, available online 15 Feb. 2006.
- [P10] Robert Eymard, Sophie Mercier (2008) Comparison of numerical methods for the assessment of production availability of a hybrid system, *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 93, Issue 1, Jan. 2008, pp. 169-178, available online 29 Dec. 2006.
- [P11] Sophie Mercier (2008) Numerical bounds for semi-markovian quantities and application to reliability, *Methodology and Computing in Applied Probability*, Volume 10, Number 2, Jun. 2008, pp. 179-198, available online 3 Jul. 2007.
- [P12] Sophie Mercier (2008) Bounds and approximations for continuous-time markovian transition probabilities and large systems, *European Journal of Operational Research*, Volume 185, Issue 1, Feb. 2008, pp. 216-234, available online 30 January 2007.
- [P13] Robert Eymard, Sophie Mercier, Alain Prignet (2008) An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, available online 1 Nov. 2007.
- [P14] Sophie Mercier (2008) Optimal replacement policy for obsolete components with general failure rates, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Volume 24, Issue 3, May/June 2008, pp. 221-235, available online 8 Jan. 2008.

Chapitres de livre

- [CL1] Sophie Mercier, Michel Roussignol (2008) Sensitivity Estimates in Dynamic Reliability, in *Advances in Mathematical Modeling for Reliability*, Editeurs : T. Bedford, J. Quigley, L. Walls, B. Alkali, A. Daneshkhah and G. Hardman, IOS Press, Amsterdam (Pays-Bas), pp. 208-216.
- [CL2] Robert Eymard, Sophie Mercier, Alain Prignet, Michel Roussignol (2008), A finite volume scheme for sensitivity analysis in dynamic reliability, in *Finite Volumes for Complex Applications V*, Editeurs : Robert Eymard and Jean-Marc Hérard, Wiley, Aussois (France), pp. 383-390.

Article soumis

- [S1] Robert Eymard, Sophie Mercier, Michel Roussignol, Importance and sensitivity analysis in dynamic reliability, travail soumis en Juin 2008 à *Methodology and Computing in Applied Probability*.

Communications dans des conférences nationales et internationales avec comité scientifique et actes

- [**CI1**] XXXIèmes Journées de Statistique, Grenoble, 17-21 May 1999, Sophie Bloch-Mercier, Optimisation de la disponibilité asymptotique d'un système semi-markovien soumis à une maintenance aléatoire (4 pages).
- [**CI2**] XXXIIèmes Journées de Statistique, Fès, 15-19 May 2000, Sophie Bloch-Mercier, Coût moyen asymptotique d'un système markovien soumis à une politique de maintenance préventive (4 pages).
- [**CI3**] MMR 2000 (Second International Conference on Mathematical Methods on Reliability), Bordeaux, 4-7 July 2000, Sophie Bloch-Mercier, Stationary availability of a Markov system with preventive random maintenance (4 pages).
- [**CI4**] ASMDA 2001 (10th International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis), Compiègne, 12-15 June 2001, Sophie Bloch-Mercier, Optimization of the corrective maintenance of a repairable system (6 pages).
- [**CI5**] Congrès Lambda-Mu 13 - ESREL 2002, Lyon, June 2002, Sophie Bloch-Mercier, Optimal restarting distribution after repair for a Markov deteriorating system (6 pages).
- [**CI6**] MMR 2002 (Third International Conference on Mathematical Methods on Reliability), Trondheim, Norvège, 17-20 June 2002, Sophie Mercier et Michel Roussignol, Asymptotic failure rate of a Markov deteriorating system with preventive maintenance (4 pages).
- [**CI7**] Qualita 2003, Nancy, 18-20 March 2003, Sophie Mercier et Pierre-Etienne Labeau, Optimal scheduling for the replacement of components subject to technological obsolescence (8 pages).
- [**CI8**] PSAM / ESREL' 04 (International Conference on Probabilistic Safety Assesment and Management), Berlin, 14-18 june 2004, Odile Michel, Pierre-Etienne Labeau, Sophie Mercier, Monte-Carlo optimization of the replacement strategy of components subject to technological obsolescence (6 pages).
- [**CI9**] PSAM / ESREL' 04 (International Conference on Probabilistic Safety Assesment and Management), Berlin, 14-18 june 2004, Christiane Cocozza-Thivent, Robert Eymard, Sophie Mercier, A numerical scheme to solve integro-differential equations in the dynamic reliability field (6 pages).

- [CI10] Congrès Lambda-Mu 14, Bourges, oct. 2004, Christiane Coccozza-Thivent, Robert Eymard, Sophie Mercier, Méthodes et algorithmes pour la quantification de petits systèmes redondants (8 pages).
- [CI11] Congrès Lambda-Mu 14, Bourges, oct. 2004, Sophie Mercier, Encadrement de variables aléatoires et application à la fiabilité (8 pages).
- [CI12] Qualita 2005, Bordeaux, 16-18 mars 2005, Margot Desgrouas, Sophie Mercier, Comportement asymptotique d'un exemple de fiabilité dynamique (8 pages).
- [CI13] FVCA4 (The International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications IV), Marrakech, 4-8 Jul. 2005, Christiane Coccozza-Thivent, Robert Eymard, Sophie Mercier, A finite Volume scheme for dynamic reliability studies (9 pages).
- [CI14] Congrès Lambda-Mu 15, Lille, octobre 2006, Margot Desgrouas, Christiane Coccozza, Sophie Mercier, Algorithme de calcul de disponibilité asymptotique en fiabilité dynamique (8 pages).
- [CI15] Congrès Lambda-Mu 15, Lille, octobre 2006, Sophie Mercier, Encadrement de quantités fiabilistes pour un gros système markovien (8 pages).
- [CI16] MMR 2007 (Fifth International Conference on Mathematical Methods on Reliability), Glasgow, Scotland, 1-4 July 2007, Sophie Mercier & Michel Roussignol, Sensitivity Estimates in Dynamic Reliability (12 pages).
- [CI17] FVCA5 (The International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications V), juin 2008, Aussois, France, Robert Eymard, Sophie Mercier, Alain Prignet, Michel Roussignol, A finite volume scheme for sensitivity analysis in dynamic reliability (8 pages).
- [CI18] ESREL 2008 and 17th SRA-Europe Conference (joint conferences), 22 - 25 Septembre 2008, Valencia, Spain, Robert Eymard, Sophie Mercier, Michel Roussignol, Importance Factors in Dynamic Reliability (8 pages), communication acceptée.
- [CI19] ESREL 2008 and 17th SRA-Europe Conference (joint conferences), 22 - 25 Septembre 2008, Valencia, Spain, Sophie Mercier, Optimal replacement policy for components with general failure rates submitted to obsolescence (8 pages), communication acceptée.

Communications dans des conférences nationales avec comité scientifique sans actes

- [CN1] Journées MAS de Probabilités (groupe Modélisation Aléatoire et Statistique de la SMAI), 16-18 September 1998, Nice, Sophie Bloch-Mercier, Optimisation de la disponibilité asymptotique d'un système semi-markovien à deux états soumis à une maintenance aléatoire.
- [CN2] Journées MAS de Probabilités (groupe Modélisation Aléatoire et Statistique de la SMAI), 6-8 September 2000, Rennes, Sophie Bloch-Mercier et Christiane Coccozza-Thivent, Une politique de maintenance préventive conditionnelle, deux approches.

Thèse

- [T] Modèles et optimisation de politiques de maintenance de systèmes, soutenue le 18 Décembre 2000 à l'Université de Marne-la-Vallée, Directeur : Michel Roussignol.

Articles de vulgarisation

- [V1] Sophie Bloch-Mercier, Christiane Coccozza-Thivent, Michel Roussignol (2000), Divers modèles stochastiques pour l'optimisation de la maintenance, *Journal de la SFdS* 3, 141e année, pp. 9-22.
- [V2] Sophie Bloch-Mercier (2000), Optimisation de la maintenance corrective d'un système réparable, *Journal de la SFdS* 3, 141e année, pp. 23-36.

Ouvrage pédagogique

- [O1] Guy Auliac, Christiane Coccozza, Sophie Mercier, Michel Roussignol (2005) Mathématiques pour la licence : Intégration et probabilités. 3ème année. Cours et exercices corrigés (2005). Ediscience, Collection Objectif Licence. 416 pages.

Bibliographie

- [Ahmad et Kayid, 2005] AHMAD, I. A. et KAYID, M. (2005). Characterizations of the RHR and MIT orderings and the DRHR and IMIT classes of life distributions. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 19(4):447–461.
- [Asmussen, 2003] ASMUSSEN, S. (2003). *Applied probability and queues*, volume 51 de *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition.
- [Barlow et al., 1963] BARLOW, R. E., HUNTER, L. C. et PROSCHAN, F. (1963). Optimum checking procedures. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11:1078–1095.
- [Barlow et Proschan, 1965] BARLOW, R. E. et PROSCHAN, F. (1965). *Mathematical theory of reliability*, volume 17 de *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA. With contributions by Larry C. Hunter, 1996.
- [Barlow et Proschan, 1966] BARLOW, R. E. et PROSCHAN, F. (1966). Inequalities for linear combinations of order statistics from restricted families. *Ann. Math. Statist.*, 37:1574–1592.
- [Bäuerle et al., 2007] BÄUERLE, N., BLATTER, A. et MÜLLER, A. (published online : 24 October 2007). Dependence properties and comparison results for lévy processes. *Math. Oper. Res.*, 67(1):161–186.
- [Block et al., 1998] BLOCK, H. W., SAVITS, T. H. et SINGH, H. (1998). The reversed hazard rate function. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 12(1):69–90.
- [Boccardo et Gallouët, 1989] BOCCARDO, L. et GALLOUËT, T. (1989). Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *J. Funct. Anal.*, 87(1):149–169.
- [Boccardo et al., 1993] BOCCARDO, L., GALLOUËT, T. et VÁZQUEZ, J. L. (1993). Nonlinear elliptic equations in \mathbf{R}^N without growth restrictions on the data. *J. Differential Equations*, 105(2):334–363.

- [Bon et Philippe, 2004] BON, J.-L. et PHILIPPE, A. (2004). Numerical comparisons of approximations of geometric sums. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.*, 20(1):37–48.
- [Boxma *et al.*, 2006] BOXMA, O., PERRY, D., STADJE, W. et ZACKS, S. (2006). A Markovian growth-collapse model. *Adv. in Appl. Probab.*, 38(1):221–243.
- [Cao et Chen, 1997] CAO, X.-R. et CHEN, H.-F. (1997). Perturbation realization, potentials, and sensitivity analysis of Markov processes. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42(10):1382 – 1393.
- [Chambers, 2004] CHAMBERS, C. (2004). Technological advancement, learning, and the adoption of new technology. *European J. Oper. Res.*, 152(1):226–247.
- [Champier *et al.*, 1993] CHAMPIER, S., GALLOUËT, T. et HERBIN, R. (1993). Convergence of an upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh. *Numer. Math.*, 66(2):139–157.
- [Chandra et Roy, 2001] CHANDRA, N. K. et ROY, D. (2001). Some results on reversed hazard rate. *Probab. Eng. Inf. Sci.*, 15(1):95–102.
- [Ciarlet, 1989] CIARLET, P. G. (1989). *Introduction to numerical linear algebra and optimisation*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge. With the assistance of Bernadette Miara and Jean-Marie Thomas, Translated from the French by A. Buttigieg.
- [Çinlar, 1975] ÇINLAR, E. (1975). *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- [Cocozza-Thivent, 1997] COCOZZA-THIVENT, C. (1997). *Processus Stochastiques et Fiabilité Des Systèmes*, volume 28 de *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- [Cocozza-Thivent, 2000] COCOZZA-THIVENT, C. (2000). A model for a dynamic preventive maintenance policy. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 13(4):321–346.
- [Cocozza-Thivent et Eymard, 2004a] COCOZZA-THIVENT, C. et EYMARD, R. (2004a). Approximation of the marginal distributions of a semi-Markov process using a finite volume scheme. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(5):853–875.
- [Cocozza-Thivent et Eymard, 2004b] COCOZZA-THIVENT, C. et EYMARD, R. (2004b). Numerical computation of the marginal distributions of a

- semi-markov process. In PHAM, H., éditeur : *Reliability Modelling, Analysis and Optimization*, volume 9 de *Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics*. World Scientific.
- [Cocozza-Thivent et Roussignol, 1997] COCOZZA-THIVENT, C. et ROUSSIGNOL, M. (1997). Semi-Markov processes for reliability studies. *ESAIM Probab. Statist.*, 1:207–223 (electronic).
- [Cont et Tankov, 2004] CONT, R. et TANKOV, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [Costa, 1990] COSTA, O. L. V. (1990). Stationary distributions for piecewise-deterministic Markov processes. *J. Appl. Probab.*, 27(1):60–73.
- [Costa et Dufour, 2006] COSTA, O. L. V. et DUFOUR, F. (2006). Ergodic properties and ergodic decompositions of continuous-time Markov processes. *J. Appl. Probab.*, 43(3):767–781.
- [Costa et Dufour, 2008] COSTA, O. L. V. et DUFOUR, F. (2008). Stability and ergodicity of piecewise deterministic Markov processes. *SIAM J. Control Optim.*, 47(2):1053–1077.
- [Csenki, 2002] CSENKI, A. (2002). *Stochastic Models in Reliability and Maintenance*, chapitre Transient Analysis of Semi-Markov Reliability Models - A Tutorial Review with Emphasis on Discrete-Parameter Approaches, pages 219–251. Springer, Berlin, Osaki, Shunji édition.
- [Davis, 1984] DAVIS, M. H. A. (1984). Piecewise-deterministic Markov processes : a general class of nondiffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3):353–388. With discussion.
- [Davis, 1993] DAVIS, M. H. A. (1993). *Markov models and optimization*, volume 49 de *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London.
- [Dekker *et al.*, 1997] DEKKER, R., WILDEMAN, R. E. et van der DUYN SCHOUTEN, F. A. (1997). A review of multi-component maintenance models with economic dependence. *Math. Methods Oper. Res.*, 45(3):411–435. Stochastic models of reliability.
- [Desgrouas, 2007] DESGROUAS, M. (2007). *Comportement asymptotique de processus utilisés en fiabilité dynamique*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée. French.
- [Devooght, 1997] DEVOOGHT, J. (1997). Dynamic reliability. *Advances in Nuclear Science and Technology*, 25:215–278.

- [Dohi *et al.*, 2002] DOHI, T., KAIIO, N. et OSAKI, S. (2002). *Stochastic Models in Reliability and Maintenance*, chapitre Renewal processes and their computational aspects, pages 1–30. Springer, Berlin, Osaki, Shunji édition.
- [Droniou *et al.*, 2003] DRONIOU, J., GALLOUËT, T. et HERBIN, R. (2003). A finite volume scheme for a noncoercive elliptic equation with measure data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6):1997–2031 (electronic).
- [Dufour et Costa, 1999] DUFOUR, F. et COSTA, O. L. V. (1999). Stability of piecewise-deterministic Markov processes. *SIAM J. Control Optim.*, 37(5):1483–1502 (electronic).
- [Dufour *et al.*, 2006] DUFOUR, F., DUTUIT, Y., ZHANG, H. et INNAL, F. (2006). Fiabilité dynamique et processus déterministes par morceaux. In *Actes Du Congrès Lambda-Mu 15*, Lille, France. French.
- [Elmakis *et al.*, 2002] ELMAKIS, D., LEVITIN, G. et LISNIANSKI, A. (2002). Optimal scheduling for replacement of power system equipment with new-type one. In *Proc. Of MMR'2002 (Mathematical Methods in Reliability 2002)*, pages 227–230, Trondheim (Norway).
- [Eymard *et al.*, 1995] EYMARD, R., GALLOUËT, T. et HERBIN, R. (1995). Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 16(1):1–14. A Chinese summary appears in *Chinese Ann. Math. Ser. A* **16** (1995), no. 1, 119.
- [Finkelstein, 2002] FINKELSTEIN, M. (2002). On the reversed hazard rate. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, 78:71–75(5).
- [From, 2001] FROM, S. G. (2001). Some new approximations for the renewal function. *Comm. Statist. Simulation Comput.*, 30(1):113–128.
- [Gallouët et Herbin, 1999] GALLOUËT, T. et HERBIN, R. (1999). Finite volume approximation of elliptic problems with irregular data. In *Finite volumes for complex applications II*, pages 155–162. Hermes Sci. Publ., Paris.
- [Gandini, 1990] GANDINI, A. (1990). Importance & sensitivity analysis in assessing system reliability. *IEEE Trans. Reliab.*, 39(1):61–70.
- [Garg et Kalagnanam, 1998] GARG, A. et KALAGNANAM, J. (1998). Approximations for the renewal function. *IEEE Trans. Reliab.*, 47(1):66–72.
- [Glen *et al.*, 2001] GLEN, A. G., EVANS, D. L. et LEEMIS, L. M. (2001). APPL : a probability programming language. *Amer. Statist.*, 55(2):156–166.

- [Gupta et Gupta, 2007] GUPTA, R. C. et GUPTA, R. D. (2007). Proportional reversed hazard rate model and its applications. *J. Statist. Plann. Inference*, 137(11):3525–3536. Special Issue : In Celebration of the Centennial of The Birth of Samarendra Nath Roy (1906-1964).
- [Hopp et Nair, 1994] HOPP, W. et NAIR, S. (1994). Markovian deterioration and technological change. *IIE Transactions*, 26(6):74–82.
- [Hu et Li, 2007] HU, T. et LI, Y. (2007). Increasing failure rate and decreasing reversed hazard rate properties of the minimum and maximum of multivariate distributions with log-concave densities. *Metrika*, 65(3):325–330.
- [Iosifescu et al., 2007] IOSIFESCU, M., LIMNIOS, N. et OPRISAN, G. (2007). *Modèles Stochastiques*. Collection Méthodes Stochastiques Appliquées. Hermes Sci. Publ., Paris. French.
- [Jacobsen, 2006] JACOBSEN, M. (2006). *Point process theory and applications*, chapitre Marked point and piecewise deterministic processes. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.
- [Kijima, 1997] KIJIMA, M. (1997). *Markov processes for stochastic modeling*. Stochastic Modeling Series. Chapman & Hall, London.
- [Kijima, 1998] KIJIMA, M. (1998). Hazard rate and reversed hazard rate monotonicities in continuous-time Markov chains. *J. Appl. Probab.*, 35(3): 545–556.
- [Labeau, 1996] LABEAU, P.-E. (1996). *Méthodes Semi-Analytiques et Outils de Simulation En Dynamique Probabiliste*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Service de Métrologie Nucléaire, ULB, Bruxelles.
- [Labeau et Dutuit, 2004] LABEAU, P.-E. et DUTUIT, Y. (2004). Fiabilité dynamique et disponibilité de production : Un cas illustratif. *In Actes Du Congrès Lambda-Mu 14*, pages 431–436, Bourges, France. French.
- [Lefebvre, 2003] LEFEBVRE, Y. (2003). *Nouveaux Développements et Justifications de Méthodes de Calcul de Mesures de Performance En Sécurité de Fonctionnement*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée. French.
- [Lions, 1968] LIONS, J.-L. (1968). *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Dunod, Paris.
- [Marseguerra et al., 1998] MARSEGUERRA, M., ZIO, E., DEVOOGHT, J. et LABEAU, P.-E. (1998). A concept paper on dynamic reliability via monte carlo simulation. *Math. Comput. Simul.*, 47(2):371–382.

- [Meyn et Tweedie, 1993a] MEYN, S. P. et TWEEDIE, R. L. (1993a). Stability of Markovian processes. II. Continuous-time processes and sampled chains. *Adv. in Appl. Probab.*, 25(3):487–517.
- [Meyn et Tweedie, 1993b] MEYN, S. P. et TWEEDIE, R. L. (1993b). Stability of Markovian processes. III. Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 25(3):518–548.
- [Moler et Van Loan, 1978] MOLER, C. et VAN LOAN, C. (1978). Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Rev.*, 20(4):801–836.
- [Moler et Van Loan, 2003] MOLER, C. et VAN LOAN, C. (2003). Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Rev.*, 45(1):3–49 (electronic).
- [Nanda et Shaked, 2001] NANDA, A. K. et SHAKED, M. (2001). The hazard rate and the reversed hazard rate orders, with applications to order statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 53(4):853–864.
- [Pierskalla et Voelker, 1976] PIERSKALLA, W. P. et VOELKER, J. A. (1976). A survey of maintenance models : the control and surveillance of deteriorating systems. *Naval Res. Logist. Quart.*, 23(3):353–388.
- [Rauzy, 2004] RAUZY, A. (2004). An experimental study on iterative methods to compute transient solutions of large markov models. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, 86:105–115.
- [Reibman et al., 1989] REIBMAN, A., SMITH, R. et TRIVEDI, K. (1989). Markov and Markov reward model transient analysis : an overview of numerical approaches. *European J. Oper. Res.*, 40(2):257–267.
- [Ross, 2000] ROSS, S. M. (2000). *Introduction to probability models*. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, seventh édition.
- [Shaked et Shanthikumar, 1988] SHAKED, M. et SHANTHIKUMAR, J. G. (1988). On the first-passage times of pure jump processes. *J. Appl. Probab.*, 25(3):501–509.
- [Shaked et Shanthikumar, 2007] SHAKED, M. et SHANTHIKUMAR, J. G. (2007). *Stochastic orders*. Springer Series in Statistics. Springer, New York.
- [Sherif et Smith, 1981] SHERIF, Y. S. et SMITH, M. L. (1981). Optimal maintenance models for systems subject to failure – a review. *Naval Res. Logist. Quart.*, 28(1):47–74.

- [Sidje et Stewart, 1999] SIDJE, R. et STEWART, W. (1999). A numerical study of large sparse matrix exponentials arising in Markov chains. *Comput. Stat. Data Anal.*, 29(3):345–368.
- [Stoyan, 1983] STOYAN, D. (1983). *Comparison methods for queues and other stochastic models*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester. Translation from the German edited by Daryl J. Daley.
- [Tortorella, 2005] TORTORELLA, M. (2005). Numerical solutions of renewal-type integral equations. *INFORMS J. Comput.*, 17(1):66–74.
- [Wang, 2002] WANG, H. (2002). A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European J. Oper. Res.*, 139(3):469–489.
- [Zhang et al., 2007] ZHANG, H., DUFOUR, F. et DUTUIT, Y. (2007). Piecewise deterministic markov processes and dynamic reliability. In *Proceedings of Mathematical Methods in Reliability : Methodology and Practice*, Glasgow, Ecosse.

Modèles stochastiques et méthodes numériques pour la fiabilité - Résumé

En premier lieu, nous proposons, étudions et optimisons différentes politiques de maintenance pour des systèmes réparables à dégradation markovienne ou semi-markovienne, dont les durées de réparation suivent des lois générales.

Nous nous intéressons ensuite au remplacement préventif de composants devenus obsolètes, du fait de l'apparition de nouveaux composants plus performants. Le problème est ici de déterminer la stratégie optimale de remplacement des anciens composants par les nouveaux. Les résultats obtenus conduisent à des stratégies très différentes selon que les composants ont des taux de panne constants ou non.

Les travaux suivants sont consacrés à l'évaluation numérique de différentes quantités fiabilistes, les unes liées à des sommes de variables aléatoires indépendantes, du type fonction de renouvellement par exemple, les autres liées à des systèmes markoviens ou semi-markoviens. Pour chacune de ces quantités, nous proposons des bornes simples et aisément calculables, dont la précision peut être ajustée en fonction d'un pas de temps. La convergence des bornes est par ailleurs démontrée, et des algorithmes de calcul proposés.

Nous nous intéressons ensuite à des systèmes hybrides, issus de la fiabilité dynamique, dont l'évolution est modélisée à l'aide d'un processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP). Pour de tels systèmes, les quantités fiabilistes usuelles ne sont généralement pas atteignables analytiquement et doivent être calculées numériquement. Ces quantités s'expriment à l'aide des lois marginales du PDMP (les lois à t fixé), nous nous attachons plus spécifiquement à leur évaluation. Pour ce faire, nous commençons par les caractériser comme unique solution d'un système d'équations intéro-différentielles. Puis, partant de ces équations, nous proposons deux schémas de type volumes finis pour les évaluer, l'un explicite, l'autre implicite, dont nous démontrons la convergence. Nous étudions ensuite un cas-test issu de l'industrie gazière, que nous modélisons à l'aide d'un PDMP, et pour lequel nous calculons différentes quantités fiabilistes, d'une part par méthodes de volumes finis, d'autre part par simulations de Monte-Carlo. Nous nous intéressons aussi à des études de sensibilité : les caractéristiques d'un PDMP sont supposées dépendre d'une famille de paramètres et le problème est de comparer l'influence qu'ont ces différents paramètres sur un critère donné, à horizon fini ou infini. Cette étude est faite au travers des dérivées du critère d'étude par rapport aux paramètres, dont nous démontrons l'existence et que nous calculons.

Enfin, nous présentons rapidement les travaux effectués par Margot Desgrouas lors de sa thèse consacrée au comportement asymptotique des PDMP, et nous donnons un aperçu de quelques travaux en cours et autres projets.

Stochastic models and numerical methods for reliability - Summary

We first propose, study and optimize different maintenance policies for repairable systems with markovian or semi-markovian deterioration, and repair durations with general distribution.

We are next interested in the preventive replacement of components subject to obsolescence, due to the arrival of newer and more competitive components. The problem here is to find the optimal replacement strategy of the older components by the newer. The results lead to very different strategies, according to whether components have constant failure rates or not.

The following works are devoted to the numerical estimation of different quantities in reliability, among which some are linked to sums of independent random variables, such as renewal functions for instance, and others are linked to markovian or semi-markovian systems. For each of the studied quantities, simple bounds are proposed, which are easy to compute. Their precision is adjustable according to some time step and their convergence is proved. Algorithms are also provided, for their numerical computation.

We are next interested in hybrid systems from dynamic reliability, which evolve according to piecewise deterministic Markov processes (PDMP). For such systems, usual criteria in reliability are generally not available in closed form, and must be numerically estimated. As those criteria may be expressed in term of the marginal distributions of the PDMP (the distributions at time t), we here concentrate more specifically on their estimation. With that aim, we first characterize them as the single solution to a system of integro-differential equations. We next start from such equations and propose two finite volume schemes for their evaluation, one explicit and the other implicit, which are proved to converge. We then study a benchmark from gas industry, which we model with a PDMP, and for which different reliability quantities are computed, first by finite volume methods, secondly by Monte-Carlo simulations. We also have interest in sensitivity analysis : the data of a PDMP are assumed to depend on a family of parameters and the problem is to compare the influence of the different parameters on a given criterium, either in finite or infinite time. Such a study is made through the derivatives of the criterium with respect of the parameters, which we prove to exist and compute.

Finally, we quickly present the PhD work of Margot Desgrouas devoted to the asymptotic behaviour of PDMPs and give some outlines of a few current works and other projects.