

## Modélisation et quantification de systèmes vieillissants pour l'optimisation de la maintenance

LAIR William<sup>1,2</sup>, MERCIER Sophie<sup>1</sup>, ROUSSIGNOL Michel<sup>1</sup>, ZIANI Rachid<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Paris Est, 5 bd Descartes, 77454 Marne la Vallée, France, 0160957540

[sophie.mercier@univ-paris-est.fr](mailto:sophie.mercier@univ-paris-est.fr), [michel.roussignol@univ-paris-est.fr](mailto:michel.roussignol@univ-paris-est.fr)

<sup>2</sup> SNCF, 45 rue de Londres, 75008, Paris, France, 0153429141

[william.lair@sncf.fr](mailto:william.lair@sncf.fr), [rachid.ziani@sncf.fr](mailto:rachid.ziani@sncf.fr)

Mots clés : Processus de Markov déterministe par morceaux, calculs numériques, méthode de volumes finis, maintenance, simulations de Monte-Carlo.

### 1. Introduction

Pour un gestionnaire délégué d'infrastructure ferroviaire comme la SNCF, la maintenance des installations de signalisation est une tâche fondamentale, car elle influe directement sur les deux notions les plus importantes d'un système de transport, à savoir la sécurité et la ponctualité. La SNCF a donc engagé des recherches dans le but d'améliorer l'efficacité de la maintenance de ses installations.

L'installation de signalisation qui fait l'objet de cette étude est le circuit de voie qui est un circuit électrique permettant de détecter la présence d'un train sur la voie [Antoni]. Il s'agit d'un système formé d'une dizaine de composants vieillissants. Nous considérons dans cet article les composants comme indépendants, en effet les modèles statistiques que nous avons utilisés pour estimer les dépendances entre composant ne sont pas encore tout à fait au point. Malgré cette hypothèse simplificatrice, les processus markoviens de sauts, fréquemment utilisés dans un contexte industriel, ne conviennent pas pour modéliser le système car ils considèrent que les taux de transition entre les différents états (taux de panne ou de réparation par exemple) sont constants. Nous avons donc recours à un autre type de processus : les processus de Markov déterministes par morceaux (PDMP : Piecewise Deterministic Markov Process en anglais), introduits par M.H.A. Davis [Davis]. Ces processus sont très utilisés en fiabilité dynamique, où ils permettent de modéliser des interactions entre le système d'intérêt et son environnement. Dans un contexte de fiabilité classique comme le nôtre, ils permettent de prendre en compte le vieillissement des composants, les éventuelles dépendances entre composants, ainsi que le remplacement de composants lors des maintenances.

Dans ce qui suit, nous commençons par rappeler la structure d'un processus de Markov déterministe par morceaux. En ce qui concerne l'évaluation numérique des critères fiabilistes associés, nous proposons deux méthodes différentes, à savoir les méthodes de simulations de Monte-Carlo, classiques dans un tel contexte, et des méthodes de type volumes finis, développées dans [Cocozza-Thivent & al, Eymard & al]. Nous montrons ensuite comment on peut modéliser l'évolution du circuit de voie (ou d'un autre système formé de composants vieillissants) à l'aide d'un PDMP et nous calculons les différents critères d'intérêt (fiabilité, disponibilité, coût moyen, loi du nombre de pannes...). Nous nous intéressons enfin à différentes politiques de maintenance, pour lesquelles les critères d'intérêts sont évalués et optimisés. Tous les calculs numériques sont effectués à l'aide des deux méthodes proposées, à fin de comparaison.

### 2. Les processus de Markov déterministes par morceaux

Un processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP) est un processus hybride  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ , où la première composante  $I = (I_t)_{t \geq 0}$  est discrète, à valeurs dans un espace fini ou dénombrable, et où la

deuxième composante  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , est continue, à valeurs dans  $R^d$ . La première composante représente l'état du système (marche, panne, états des composants), la deuxième représente des variables physiques qui influent sur le système, comme par exemple la température, la pression ou encore l'âge des différents composants. Les deux composantes d'un PDMP sont en mutuelle interaction : le taux de transition de  $I_{t-}$  vers  $I_t$  est une fonction  $a(I_{t-}, I_t, X_{t-})$  qui dépend de la composante continue ; entre deux sauts de  $I$ , sachant que  $I_t = i$ , la trajectoire de  $X$  est déterministe, solution d'une équation différentielle ordinaire de la forme  $\frac{dX}{dt} = v(i, X)$ , qui dépend de l'état discret  $i$ . Lors d'un saut de  $I$  à l'instant  $t$ , la variable « continue »  $X_t$  peut aussi sauter et est distribuée selon une loi  $\mu_{(I_{t-}, I_t, X_{t-})}^{(d, y)}$  qui dépend de la composante discrète.

Sous des conditions techniques, on peut montrer qu'un PDMP est un processus markovien [Davis], ce qui permet d'écrire les équations de Chapman-Kolmogorov (CK) associées. Si  $\pi_t(i, dx)$  désigne la loi du processus  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  à l'instant  $t$  et  $\pi_0(i, dx)$  sa loi initiale et si on s'intéresse à une quantité  $E[\varphi(I_t, X_t)]$  pour une fonction  $\varphi$  du processus, ces équations se mettent sous la forme :

$$\int_0^t \sum_{i \in E} \int_{R^d} \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left( \int_{G_j} \varphi(j, y) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x) \right) \pi_s(i, dx) ds + \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{R^d} v(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x) \pi_s(i, dx) ds - \sum_{i \in E} \int_{R^d} \varphi(i, x) \pi_t(i, dx) + \sum_{i \in E} \int_{R^d} \varphi(i, x) \pi_0(i, dx) = 0$$

Les méthodes de volumes finis proposées dans [Cocozza-Thivent & al, Eymard & al] fournissent une valeur approchée de  $\pi_t(i, dx)$  et reposent sur une discrétisation des équations CK, à la fois en temps ( $t$ ) et en espace ( $x$ ). La plupart des critères fiabilistes d'intérêt s'écrivant à l'aide de la loi  $\pi_t(i, dx)$ , ces méthodes nous permettent donc de les calculer.

Ainsi comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous utilisons aussi des simulations de Monte-Carlo, qui ne posent pas de difficultés particulières.

### 3. Le circuit de voie

Pour des raisons de confidentialité, toutes les données et tous les résultats fournis dans ce papier sont fictifs.

#### 3.1. Description

Le circuit de voie est un système série d'une dizaine de composants, que nous supposons indépendants. Pour la modélisation, nous ne nous intéressons qu'à huit d'entre eux. Ceux que l'on ne modélise pas ont une durée de vie très grande par rapport à celles des autres et n'entraînent que très rarement la panne du système. Lorsqu'un composant est en panne, il est remplacé par un composant identique neuf. Les composants pris en compte sont les suivants : un émetteur, un récepteur, quatre blocs d'accord (BA), et deux transformateurs d'adaptation (TAD). Les données liées à ces composants sont décrites dans le tableau 1. Dans ce tableau, Weibull (a ; b) correspond à une loi de Weibull de paramètre de forme a et de paramètre d'échelle b. Bertholon (a ; b ; c ; d) correspond à une loi de durée de vie à risques concurrents : la durée de vie associée est le minimum entre une durée de vie de loi exponentielle de paramètre a et une durée de vie de loi de Weibull décalée de b, de paramètre d'échelle c et de paramètre de forme d. Ce type de loi a été proposé et étudié dans [Bertholon].

Composant	Coût du composant (€)	Loi de durée de vie
-----------	-----------------------	---------------------

<i>Emetteur</i>	1000	<i>Bertholon (30; 2; 10; 6)</i>
<i>Récepteur</i>	2000	<i>Weibull (3; 20)</i>
<i>TAD</i>	500	<i>Bertholon (40; 4; 15; 2)</i>
<i>BA</i>	700	<i>Bertholon (100; 5; 20; 3)</i>

**Tableau 1:** Description des composants

### 3.2. Modélisation

Le circuit de voie étant un système série, il est en panne dès que l'un de ses composants est en panne. Par ailleurs, les durées de remplacement d'un composant défaillant étant très petites devant les durées de fonctionnement, nous considérons que, lors du remplacement d'un composant défaillant, aucun autre composant ne peut tomber en panne pendant ce temps. Ceci nous amène à 9 états possibles pour le système : l'état de marche, noté  $I$ , et les 8 états de panne, notés  $0_i$  pour  $i$  dans  $E = \{1, \dots, 8\}$ , correspondant au cas où tous les composants fonctionnent sauf un. Les 8 composants étant vieillissants, nous considérons 8 variables physiques  $X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^8$  qui, pour chaque composant, indiquent la durée écoulée à l'instant  $t$  depuis son dernier changement d'état (marche ou panne) : lorsque le composant est en marche, il s'agit de l'âge du composant depuis sa mise en route ; lorsqu'il est en panne, il s'agit de la durée écoulée depuis le début de son remplacement (pas instantané). On note  $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^8)$ .

L'évolution déterministe de  $X_t$  entre les sauts est ici très simple et vérifie  $\frac{d x}{d t} = (1, \dots, 1) = 1$ . En d'autres termes, sachant que  $I_t = i$  pour  $a \leq t \leq b$  et  $X_a = x$ , on a  $X_t = x + (t-a) \mathbf{1}$  pour  $a \leq t \leq b$ .

Le taux de transition de l'état  $I$  vers l'état  $0_i$  est le taux de panne du composant  $i$ , celui de  $0_i$  vers  $I$  est son taux de réparation. Lors d'une panne ou d'une réparation, la variable physique représentant l'âge du composant qui est tombé en panne ou qui est réparé est réinitialisé à 0 et l'âge des autres composants n'est pas changé.

Cette modélisation du circuit de voie à l'aide d'un PDMP nous permet d'utiliser les méthodes de volumes finis décrites au paragraphe précédent. A titre d'exemple,

$$x_{n+1}(k_1, \dots, k_8, 1) = \left( 1 - \delta t \left( \frac{8}{h} + \bar{\lambda}(k_1, \dots, k_8) \right) \right) x_n(k_1, \dots, k_8, 1) + \frac{\delta t}{h} (x_n(k_1 - 1, \dots, k_8, 1) + \dots + x_n(k_1, \dots, k_8 - 1, 1)) + \delta t \sum_{i=1}^8 1_{k_i=0} \sum_L a_i(I_i) x_n(I_1, \dots, I_8, 0_i)$$

avec  $\bar{\lambda}$  le taux de panne moyen du système sur un pas de discrétisation,  $\delta t$  le pas de discrétisation du temps,  $a_i$  le taux de panne du composant  $i$ ,  $h$  le pas de discrétisation de l'espace des variables physiques  $R^8$  et  $x_{n+1}(K, i) = P_{[n\delta t, (n+1)\delta t]}(K, i)$  la probabilité que pendant l'intervalle de temps  $[n\delta t, (n+1)\delta t]$ , les variables physiques se trouvent dans la maille  $K$  et que le système se trouve dans l'état  $i$ .

Dans les paragraphes consacrés à la maintenance préventive, nous considérons en fait un modèle simplifié où les remplacements sont considérés comme instantanés. Ceci permet d'avoir un algorithme de volumes finis plus simple et ainsi d'accélérer les calculs. Ceci facilite largement la recherche de la politique de maintenance optimale.

### 3.3. Les quantités d'intérêt

Nous cherchons à calculer la fonction fiabilité, la fonction disponibilité et le coût moyen d'entretien du circuit de voie sur une période de 20 ans ainsi que les quantiles à 95% du nombre de pannes.

## 4. Résultats

### 4.1. Système avec maintenance corrective

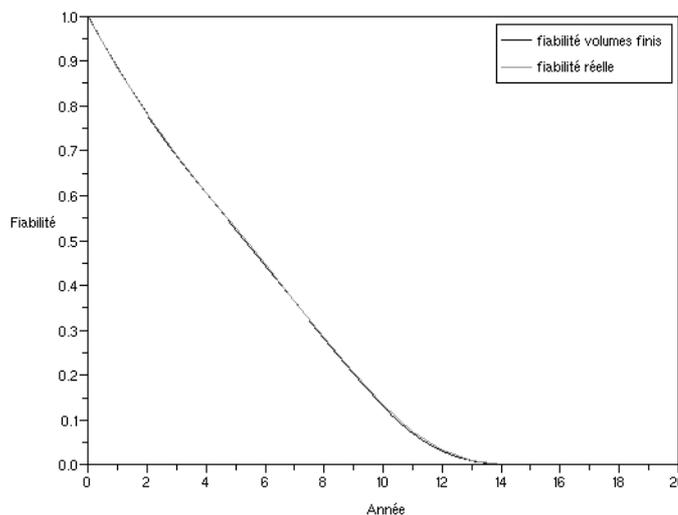
Nous allons calculer les quantités d'intérêt dans le cas où il n'y a que des maintenances correctives. Dans ce cas la panne du circuit de voie entraîne l'interruption du trafic et le déplacement d'agent afin d'effectuer une maintenance corrective.

Dans tout ce qui suit le pas de discrétisation de l'espace des variables physiques d'âge est fixé à 1/12 ans (1 mois). Le nombre de simulations pour la méthode MC est fixé à 1000000.

#### 4.1.1. Fiabilité

Il est facile d'avoir la fiabilité d'un circuit de voie neuf sans avoir recours ni à la simulation ni à l'algorithme de volumes finis. En effet, le circuit de voie est un système série donc il suffit de faire le produit des fiabilités de chaque composant. Nous allons quand même chercher la fiabilité du système à l'aide de l'algorithme de volumes finis afin de valider la méthode (figure 1).

Le pas de discrétisation du temps est 0.043 années. Le temps de calcul pour obtenir la fiabilité est de 0.73 secondes.



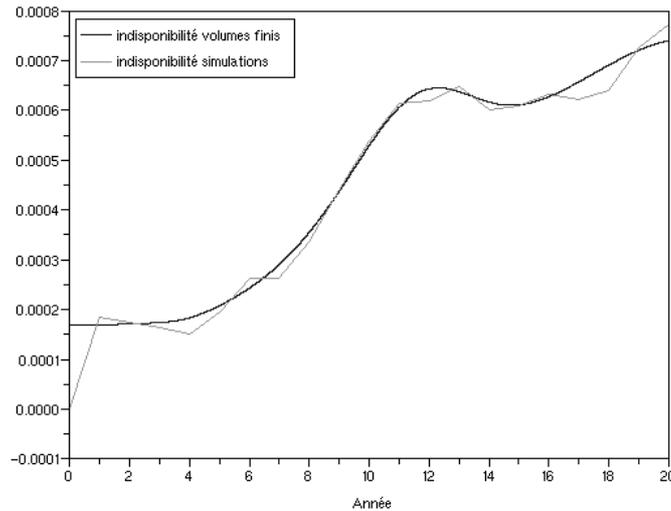
**Figure 1.** Fiabilité d'un circuit de voie neuf

#### 4.1.2. Indisponibilité

De même que pour la fiabilité, nous calculons l'indisponibilité de tous les composants puis nous les multiplions pour trouver l'indisponibilité du circuit de voie.

Il est considéré, dans ce paragraphe, que la loi de réparation est une loi exponentielle de paramètre 1/365.

Dans la figure 2, la courbe segmentée représente l'indisponibilité d'un circuit de voie dont tous les composants sont neufs, sur une période de 20 ans, calculée par simulations de MC et la courbe lisse représente la même quantité mais calculée par une méthode de VF. Les deux courbes étant très proches l'une de l'autre, on peut supposer que la méthode par volumes finis est valide.



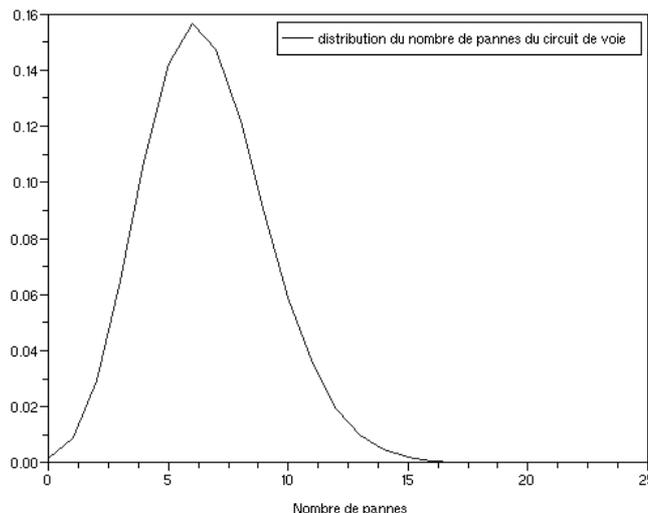
**Figure 2.** Indisponibilité d'un circuit de voie neuf

Le pas de discrétisation du temps est 0.0006849 années. Le temps de calcul pour obtenir l'indisponibilité est de 20 secondes par l'algorithme de volumes finis et 6538 secondes (plus de 2 heures) par MC.

Nous pouvons déjà observer deux avantages à la méthode par volumes finis :

- le temps de calcul est très faible (presque 300 fois inférieur à celui de la simulation),
- la courbe obtenue est lisse, contrairement à celle obtenue par simulation. Il est possible d'avoir une courbe lisse avec MC mais il faudrait augmenter le nombre d'itérations et donc accroître le temps de calcul.

#### 4.1.3 Distribution du nombre de pannes, coût moyen sur 20 ans et quantiles à 95%



**Figure 3.** Distribution du Nombre de pannes d'un circuit de voie sur 20 ans

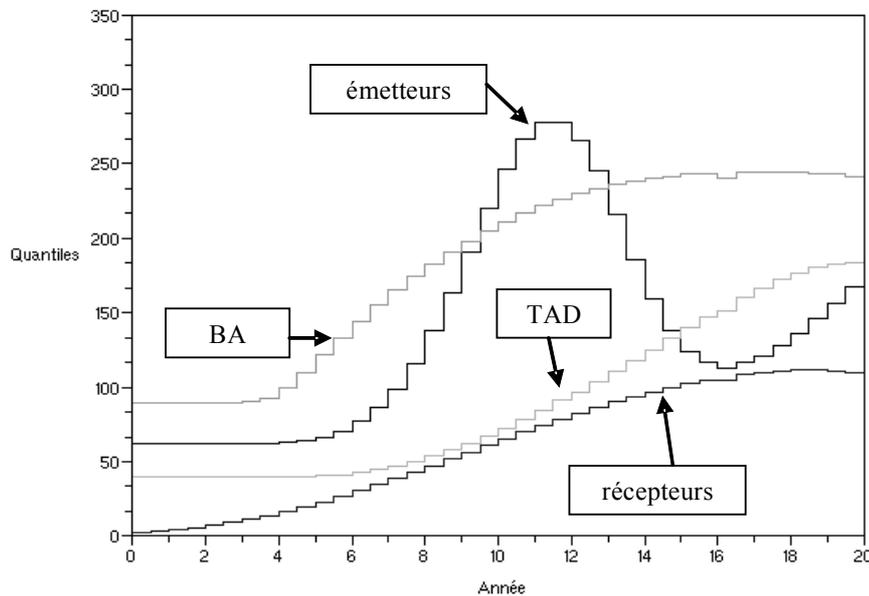
A partir de ce chapitre, les durées de réparation sont négligées devant la durée de vie des composants qui se chiffre en années.

Dans cette partie, nous cherchons à calculer le nombre moyen de pannes sur 20 ans ainsi que la variance. Pour, cela nous calculons la distribution du nombre de pannes sur une période de 20 ans à l'aide du schéma de volumes finis (figure 3).

Nous en déduisons la moyenne et la variance :  $E[N] = 6.6$   $Var(N) = 6.5$ .

Afin de mettre au point une stratégie de maintenance optimale, il est nécessaire de calculer le coût moyen d'entretien du circuit de voie sur 20 ans. Pour cela, nous calculons le nombre moyen de pannes de chaque composant que nous multiplions par le coût de la panne plus le coût du composant. Pour un coût de panne de 3000€, nous trouvons :  $E[C] = 25394€$  par VF et  $E[C] = 25207 €$  par MC.

De plus, il est intéressant de connaître le quantile à 95%, pour chaque composant et pour chaque période de 6 mois. En effet, ces quantités nous permettront de prévoir la quantité d'appareils à avoir en stock. Par exemple, la figure 4 nous donne les quantiles à 95% du nombre de défaillances de chaque appareil sur chaque période de 6 mois pour un parc de 3000 circuits de voies.



**Figure 4.** Quantiles à 95% du nombre de défaillances de chaque appareil sur chaque période de 6 mois pendant 20 ans pour un parc de 3000 circuits de voie.

Dans tous les calculs précédents le pas de discrétisation du temps est de 0.043 années. Le temps de calcul pour obtenir tous les résultats de cette partie est de 3.5 secondes. Par MC, le calcul du coût moyen a duré 500 secondes.

#### 4.2. Stratégie de maintenance préventive de type opportuniste

Nous allons étudier la stratégie de maintenance de type opportuniste qui consiste, lors d'une maintenance corrective, à remplacer non seulement le composant défaillant, mais aussi les composants trop vieux. En fait, nous faisons une maintenance corrective et une maintenance préventive au même moment. Il faut choisir pour chaque composant à partir de quel âge limite on le remplace préventivement à l'occasion d'une maintenance corrective. Nous avons optimisé ces âges pour obtenir le coût moyen sur 20 ans minimum.

Nous avons compté dans le coût d'une telle maintenance le coût du temps de remplacement d'un composant non défaillant à 60€ par heure en supposant qu'un émetteur et un récepteur sont changés chacun en 2 heures, qu'un TAD est changé en 3 heures et qu'un BA est changé en 4 heures.

Nous avons trouvé qu'il est intéressant, lors d'une panne, de changer les émetteurs de plus de 5 ans, les blocs d'accord de plus de 9 ans, les récepteurs de plus de 10 ans et les TAD de plus de 8 ans. Dans ce cas le coût moyen est de 23443€. Ce qui représente une économie de 1951€ par circuit de voie

sur 20 ans. Avec cette stratégie, nous obtenons un nombre moyen de pannes de 4.45 sur 20 ans. La fiabilité associée à une telle stratégie est la même que celle du circuit de voie sans maintenance car elle ne retardera pas la première panne.

#### 4.3. Stratégie de maintenance préventive de type périodique

Nous étudions maintenant une stratégie de maintenance périodique telle que pendant une maintenance, l'agent changera préventivement les composants jugés trop vieux. La maintenance optimale trouvée minimisera le coût d'entretien du circuit de voie sur 20 ans.

De même que dans le chapitre précédent, nous tenons compte des temps de remplacement d'un composant dans le calcul du coût moyen. De plus, nous comptons ici le temps que va mettre l'agent pour arriver sur son lieu de travail que l'on considère égal à une heure. Considérons le fait que si l'agent, lors d'un déplacement, remplace  $n$  appareils, il économise  $n-1$  heures de travail (ce qui correspond au temps de déplacement que l'agent économise). Par exemple, si lors d'un déplacement, l'agent remplace l'émetteur (2 heures) et un bloc d'accord (4 heures), on considère qu'il passe sept heures à travailler c'est-à-dire qu'il économise une heure de déplacement.

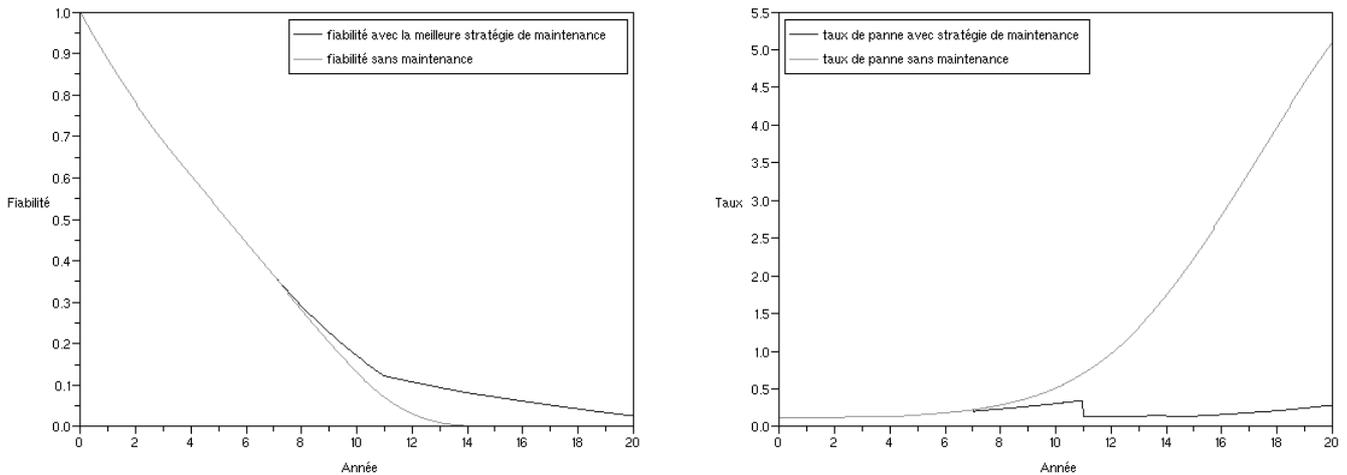
Nous calculons pour toutes les périodes de maintenance et tous les âges limites possibles, le coût moyen d'entretien de chaque composant du circuit de voie puis nous choisissons la stratégie de maintenance qui minimise le coût d'entretien du circuit de voie.

La meilleure stratégie trouvée (tableau 2) consiste à faire une maintenance préventive tous les 7 ans pendant laquelle on change les émetteurs de plus de 3 ans et une autre maintenance préventive dans 11 ans pendant laquelle on change les TAD de plus de 3 ans, les blocs d'accord de plus de 9 ans et les récepteurs de plus de 9 ans. Avec cette stratégie le coût moyen d'entretien du circuit de voie sur 20 ans est de 21592€. Nous réalisons une économie moyenne de 4342 € par circuit de voie sur 20 ans. Donc cette stratégie revient à faire sur les 20 prochaines années, trois maintenances : une dans 7 ans, une dans 11 ans et une dernière dans 14 ans. Cette stratégie permet de diviser le nombre moyen de pannes sur 20 ans par deux.

	<i>Emetteur</i>	<i>TAD</i>	<i>Bloc d'accord</i>	<i>Récepteur</i>
<i>Age limite (année)</i>	3		9	
<i>Période (année)</i>	7	11		
<i>Nombre de pannes</i>	3.54			
<i>Coût (€)</i>	21592			

**Tableau 2:** Meilleure stratégie de maintenance préventive périodique

La figure 5 permet de comparer la fiabilité et le taux de panne du circuit de voie sans maintenance préventive et avec maintenance préventive. On remarque que la fiabilité est améliorée, en effet sans maintenance préventive, près de 100% des circuits de voie subissent au moins une panne en 14 ans tandis qu'avec maintenance préventive, il en reste approximativement 10% qui n'auront pas subi de panne au bout de 14 ans. Le taux de panne est aussi amélioré avec cette stratégie de maintenance, en effet, sans maintenance préventive, le taux de panne monte rapidement après 10 ans, pour atteindre 5 au bout de 20 ans, tandis qu'avec cette stratégie de maintenance le taux de panne reste inférieur à 0.5 pendant 20 ans.



**Figure 5:** Fiabilité et taux de panne d'un circuit de voie avec et sans maintenance

En 40 secondes, l'algorithme de volumes finis est capable de donner tous les coûts nécessaires à l'optimisation tandis qu'il faut 2500 secondes à la simulation de Monte-Carlo pour obtenir un seul résultat.

## 5. Conclusion

La méthode de volumes finis permet d'exploiter pleinement la modélisation par PDMP en calculant toutes les quantités recherchées en un temps très court, contrairement à la simulation de Monte-Carlo qui nécessite de longs temps de calcul qui rendent l'optimisation de la maintenance difficile. Maintenant il serait intéressant de complexifier le système en rajoutant des dépendances entre composants. Il serait également intéressant de traiter des systèmes plus complexes notamment des systèmes avec des redondances et avec un nombre de composants plus important.

La méthodologie expliquée dans ce document a été appliquée pour le milieu ferroviaire mais il est sûrement possible de l'appliquer à d'autres domaines.

## Références

- [Cocozza-Thivent & al] C. Cocozza-Thivent, R. Eymard, S. Mercier (2006) *A finite volume scheme for dynamic reliability models*, IMA Journal of Numerical Analysis, 26(3), pp. 446-471.
- [Eymard & al] R. Eymard, S. Mercier, Alain Prignet (2008) *An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes*, Journal of Computational and Applied Mathematics, available online 1 Nov. 2007.
- [Davis] M. H. A. Davis (1993). *Markov models and optimization*, volume 49 de Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman & Hall, London.
- [Bertholon] H. Bertholon, *Une modélisation du vieillissement*, thèse 2001.
- [Antoni] M. Antoni, *Optimisation et modélisation des circuits de voie pour le TGV nord*, mémoire 1991