

UNE POLITIQUE DE MAINTENANCE PREVENTIVE ASSOCIEE A UNE DEGRADATION ACCUMULATIVE BIVARIEE OBSERVEE CONTINUMENT

A PREVENTIVE MAINTENANCE POLICY ASSOCIATED WITH A CONTINUOUSLY OBSERVED CUMULATIVE BIVARIATE DETERIORATION

Hai Ha PHAM et Sophie MERCIER

Laboratoire de Mathématique et de leurs Applications – Pau (UMR CNRS 5142)

Université de Pau et des Pays de l'Adour

Avenue de l'Université - BP 1155

Bâtiment IPRA

F- 64013 PAU cedex

France

Résumé

Nous nous intéressons à un système dont la dégradation est modélisée par deux indicateurs croissants non indépendants. Le système tombe en panne dès que l'indicateur bivarié entre dans une zone critique appelée zone de panne, qui peut avoir différentes formes. Une action de maintenance préventive est déclenchée dès que le système entre dans une zone d'alerte dite zone de maintenance. La politique de maintenance est évaluée à l'aide d'une fonction de coût sur un horizon infini. Notre objectif principal est d'étudier l'influence sur la politique de maintenance optimale, d'une part, de la dépendance entre les deux indicateurs de dégradation, d'autre part, de la forme des zones de panne et de maintenance.

Summary

We are interested in a system with deterioration modelled by two correlated increasing indicators. The system fails once the bivariate indicator enters a critical region called failure region, which may have different shapes. A preventive maintenance action is set off as soon as the system enters an alert region called preventive maintenance region. The maintenance policy is assessed through a cost function on infinite span. Our main objective is to study the influence on the optimal maintenance policy, on one hand, of the dependence between both deterioration indicators and on the other hand, of the shapes of the failure/maintenance regions.

Introduction

Depuis quelques décennies, le développement des capteurs en ligne permet d'envisager des modèles stochastiques de dégradation basés sur des mesures effectives de la dégradation d'un système. Dans le cas où la dégradation est de type cumulative, des modèles classiques sont les processus Gamma [1] et de Poisson composés, généralement considérés comme univariés (un seul indicateur). Un seul indicateur peut cependant être insuffisant pour décrire l'état de détérioration d'un système. A titre d'exemple, dans [2,3], la géométrie d'une voie de chemin de fer est synthétisée par deux indicateurs : le nivellement longitudinal et le nivellement transversal. Ces deux indicateurs étant soumis à des stress communs (comme le passage des trains), ils ne sont bien évidemment pas indépendants. D'où la nécessité de modéliser leur dépendance, en utilisant un processus bivarié. Un tel modèle est donc utile lorsque l'on s'intéresse à un système dont la détérioration est mesurée par deux indicateurs (corrélés). Un tel modèle peut aussi être utile lorsque l'on s'intéresse à deux systèmes différents placés dans un même environnement stressant, la dégradation de chacun d'entre eux étant mesurée par un unique indicateur. Ces deux situations nous montrent l'intérêt de disposer et d'étudier des modèles de dégradation bivariée (ou multivariée), qui généralisent les processus Gamma et de Poisson composés au cadre multivarié. A notre connaissance, peu d'études ont pour le moment été faites pour ce type de modèle et les politiques de maintenance standards nécessitent d'être revisités dans ce nouveau contexte. Afin de ne pas alourdir l'étude, nous nous plaçons ici dans un cadre bivarié.

Pour modéliser l'évolution d'un système dont la dégradation est mesurée par deux indicateurs croissants non indépendants, nous utilisons un processus Gamma bivarié, dont les processus marginaux sont des processus Gamma univariés (voir la partie « Le modèle » pour plus de détails). Le système tombe en panne dès qu'il atteint une zone critique L , appelée zone de panne. La dégradation étant croissante, une hypothèse naturelle sur le système est que, une fois que le système a atteint la zone de panne, il ne peut plus la quitter s'il n'est pas réparé. Ceci nous amène à mettre une hypothèse technique sur l'ensemble L , à savoir que L est un ensemble clos vers le haut, la définition précise étant donnée plus loin.

Diverses formes sont envisagées pour L ; en particulier, nous envisageons le cas où l'indicateur bivarié correspond à la détérioration de deux systèmes (ou composants) corrélés, la détérioration de chaque composant étant modélisé par un processus Gamma. Si chaque composant a un seuil de défaillance qui lui est propre, cela conduit à deux formes particulières d'ensembles L , selon que les composants sont en série ou en parallèle. Si les seuils de défaillance des deux composants sont liés, la forme de l'ensemble L peut en revanche être aussi générale que dans le cas où les deux indicateurs de détérioration mesurent deux aspects différents d'un même système.

En dehors de ces hypothèses sur la forme de l'ensemble L , propres à la dimension 2, les autres hypothèses de modélisation que nous utilisons ici sont semblables à celles utilisées dans [4] dans le cadre univarié : le système est soumis à une surveillance continue et parfaite. Dès que le système atteint la zone L , une équipe de maintenance est appelée, qui met une durée τ pour arriver. La durée de réparation est négligeable par rapport au délai d'intervention τ et elle est considérée comme instantanée. Afin d'améliorer la disponibilité du système, une politique de maintenance préventive est proposée, dans le même esprit que dans [4] : l'équipe de maintenance est appelée préventivement dès que le système atteint une zone d'alerte M , cette zone étant supposée contenir L . Cette politique de maintenance est évaluée à l'aide d'une fonction de coût sur un horizon asymptotique, qui tient compte de coûts de réparation et de coûts d'indisponibilité. L'un des buts de cette étude est de voir si la dépendance entre les deux indicateurs ou la forme des ensembles L et M ont une influence sur la politique de maintenance optimale.

La suite de cet article est organisée de la manière suivante : la première partie est consacrée à la modélisation du problème, la partie suivante à l'exposé de résultats théoriques ; la troisième présente quelques expériences numériques et nous concluons dans la dernière.

Le modèle

1 Modélisation de la détérioration : processus Gamma bivarié

Rappelons tout d'abord qu'un processus $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus Gamma univarié de paramètres (a, b) , $a, b > 0$ si :

- $Y_0 = 0$ presque sûrement,
- les accroissements de Y sont indépendants et homogènes,
- pour tout $t > 0$, la variable aléatoire Y_t suit la loi Gamma de paramètres (at, b) , de densité

$$f_{at,b}(x) = \frac{1}{\Gamma(at)} b^a e^{-bx} x^{at-1} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Un processus Gamma est un processus croissant ($X_t < X_{t+s}$ pour tous $s, t > 0$) et correspond typiquement à une dégradation accumulative.

Par la suite, on n'envisage que le cas $b = 1$, ce qui n'est pas restrictif puisque, si $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus Gamma de paramètres $(a, 1)$, alors Y/b est un processus Gamma de paramètres (a, b) , voir [1] par exemple.

En ce qui concerne le modèle bivarié $X = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$, nous envisageons la même construction que celle qui est proposée dans [5] et utilisée dans [2,3] : partant de trois processus Gamma univariés indépendants $(Y_t^{(i)})_{t \geq 0}$ de paramètres respectifs $(\alpha_i, 1)$, $\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3$, on pose :

$$X_t^{(1)} = Y_t^{(1)} + Y_t^{(3)}, \quad X_t^{(2)} = Y_t^{(2)} + Y_t^{(3)}.$$

Dans ce modèle, la variable aléatoire $Y_t^{(3)}$ représente une composante commune aux deux indicateurs de dégradation (due par exemple à un stress commun). Cette composante commune est la cause de la dépendance entre $X_t^{(1)}$ et $X_t^{(2)}$.

Les processus marginaux $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}$ et $(X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ sont des processus Gamma univariés de paramètres $(a_i, 1)$ où $a_i = \alpha_i + \alpha_3$ pour $i = 1, 2$.

Le coefficient de corrélation linéaire entre $X_t^{(1)}$ et $X_t^{(2)}$ ne dépend pas de t et égal à

$$\rho = \frac{\alpha_3}{\sqrt{a_1 a_2}}.$$

Un intérêt de cette modélisation est que toute la dépendance entre les deux processus $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}$ et $(X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ est synthétisée par le coefficient ρ (qui n'est en général pas suffisant pour caractériser toute la dépendance entre deux processus ou entre deux variables aléatoires).

Le processus bivarié dont nous venons de rappeler la construction est appelé processus Gamma bivarié par la suite. D'après ce qui précède, il est caractérisé par deux paramétrisations équivalentes : $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ou (a_1, a_2, ρ) .

Outre le fait que la dépendance est synthétisée par ρ , un autre intérêt de cette construction est que la loi conjointe du couple $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ est explicite. Plus précisément, si f_{α_i} , et F_{α_i} et \bar{F}_{α_i} désignent la densité, la fonction de répartition et la fonction de survie de $Y_t^{(i)}$ pour $i = 1, 2, 3$, la densité conjointe du vecteur $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ est alors

$$f_{X_t}(x_1, x_2) = \int_0^{\infty} f_{\alpha_1}(x_1 - x_3) f_{\alpha_2}(x_2 - x_3) f_{\alpha_3}(x_3) dx_3 \quad (*)$$

Sa fonction de répartition et sa fonction de survie sont

$$F_{X_t}(x_1, x_2) = \int_0^{\infty} F_{\alpha_1}(x_1 - x_3) F_{\alpha_2}(x_2 - x_3) f_{\alpha_3}(x_3) dx_3$$

et

$$\bar{F}_{X_t}(x_1, x_2) = \int_0^{\infty} \bar{F}_{\alpha_1}(x_1 - x_3) \bar{F}_{\alpha_2}(x_2 - x_3) f_{\alpha_3}(x_3) dx_3$$

2 Evolution du système sans maintenance préventive

Nous nous intéressons maintenant à un système dont la détérioration est modélisée par un processus Gamma bivarié $X = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$. Le système est supposé être surveillé constamment et parfaitement. Il est considéré comme étant hors d'usage (en panne) dès que son niveau de détérioration atteint une zone critique, appelée région de panne $L \subset \mathbb{R}_+^2$. La durée de fonctionnement du système est donc le temps d'atteinte de la région L , à savoir :

$$\sigma_L = \inf \{t \geq 0 : X_t \in L\}.$$

Ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction, une hypothèse naturelle sur le système est que, sans réparation, le système ne peut quitter la zone de panne une fois qu'il l'a atteinte. En d'autres termes, si $X_t \in L$, on doit avoir $X_{t+s} \in L$ pour tous $s, t > 0$. Comme $X_t \leq X_{t+s}$ (c'est-à-dire $X_t^{(1)} \leq X_{t+s}^{(1)}$ et $X_t^{(2)} \leq X_{t+s}^{(2)}$), cette hypothèse sur le système sera vérifiée dès que L est tel que, si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$ et $(x_1, x_2) \in L$, alors $(y_1, y_2) \in L$. Nous supposons donc que L vérifie cette propriété. En termes mathématiques, on dit alors que L est un ensemble clos vers le haut.

A titre illustratif, supposons, dans un premier temps, que le système étudié est formé de deux composants différents, et que, pour $i=1,2$, le processus marginal $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ représente le niveau de détérioration du i -ème composant. Notons $L_i > 0$ son seuil de panne et $\sigma_{L_i}^{(i)} = \min(t \geq 0 : X_t^{(i)} > L_i)$ sa durée de fonctionnement. Deux structures classiques sont alors envisagées, qui correspondent aux deux premiers cas envisagés ci-dessous :

Cas 1 Le système est formé de deux composants en série. Le système est en panne dès que l'un des deux indicateurs dépasse son seuil de panne, de sorte que la durée de fonctionnement du système est égal à

$$\begin{aligned}\sigma &= \min(\sigma_{L_1}^{(1)}, \sigma_{L_2}^{(2)}) \\ &= \min(t \geq 0 : X_t^{(1)} > L_1 \text{ ou } X_t^{(2)} > L_2) \\ &= \min(t \geq 0 : (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) \in L)\end{aligned}$$

où $L = \mathbb{R}_+^2 \setminus [0, L_1] \times [0, L_2]$ (Figure 1a).

Cas 2 Le système est formé de deux composants en parallèle. Pour que le système soit en panne, il faut que les deux indicateurs aient dépassé leurs seuils de panne, de sorte que la durée de fonctionnement du système est égal à

$$\begin{aligned}\sigma &= \max(\sigma_{L_1}^{(1)}, \sigma_{L_2}^{(2)}) \\ &= \min(t \geq 0 : X_t^{(1)} > L_1 \text{ et } X_t^{(2)} > L_2) \\ &= \min(t \geq 0 : (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) \in L)\end{aligned}$$

où $L = [L_1, \infty[\times [L_2, \infty[$ (Figure 1b).

Cas 3 Les seuils des deux indicateurs sont liés et le système est en panne dès que la somme des deux indicateurs dépasse un seuil donné, noté l , $l > 0$. On a alors

$$\sigma_L = \inf \{t \geq 0 : X_t^{(1)} + X_t^{(2)} > l\}$$

avec $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 \geq l\}$, $l > 0$ (Figure 1c).

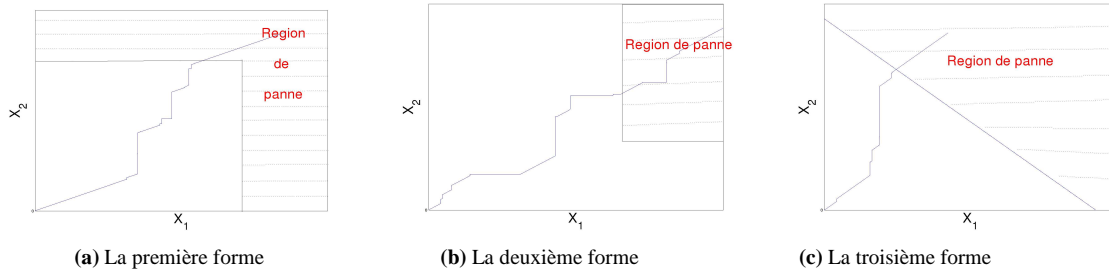


Figure 1. Les exemples de région de panne

Dans chacun de ces trois cas, l'ensemble L est un ensemble clos vers le haut.

Dès que le système est tombé en panne, une opération de maintenance corrective est déclenchée : l'équipe de maintenance est appelée ; elle met une durée τ déterministe pour arriver ; la durée de l'opération de maintenance est négligeable devant τ , et elle est donc considérée comme instantanée. La réparation est par ailleurs supposée être parfaite, de sorte que les deux indicateurs de détérioration sont remis à zéro.

Du fait du délai mis par l'équipe de maintenance pour atteindre le système (ou pour réunir les pièces nécessaires à sa réparation), le système est indisponible de l'instant de panne σ_L jusqu'à la fin de la réparation, à l'instant $\sigma_L + \tau$, soit pendant une durée τ . Pour raccourcir cette durée d'indisponibilité, une politique de maintenance préventive est proposée et décrite dans le paragraphe suivant.

3 La politique de maintenance préventive

Au lieu d'attendre l'instant de panne pour appeler l'équipe de maintenance, celle-ci est appelée préventivement lorsque la détérioration atteint une zone d'alerte, appelée zone de maintenance préventive. Cette zone, notée M , est supposée contenir L , de sorte que l'alerte soit effectivement donnée avant la panne (M est atteinte avant L). La zone est par ailleurs supposée close vers le haut, pour les mêmes raisons que L .

A l'instant $\sigma_M (\leq \sigma_L)$, l'équipe de maintenance est appelée ; comme pour une réparation, elle met une durée τ pour arriver, et l'opération de maintenance préventive, supposée instantanée et parfaite, est effectuée à l'instant $\sigma_M + \tau (\leq \sigma_L + \tau)$. Si $\sigma_L < \sigma_M + \tau$, le système est tombé en panne avant d'être réparé et le système est indisponible entre σ_L et $\sigma_M + \tau$, soit pendant une durée de longueur $\sigma_M + \tau - \sigma_L$. Au contraire, si $\sigma_L \geq \sigma_M + \tau$, le système est réparé avant de tomber en panne et la durée d'indisponibilité est nulle. Ainsi, dans tous les cas, la durée d'indisponibilité jusqu'à la remise à neuf du système est $(\sigma_M + \tau - \sigma_L)^+ = \max(\sigma_M + \tau - \sigma_L, 0)$.

Soit $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ le processus décrivant l'état du système soumis à maintenance préventive. Après une opération de maintenance préventive ou corrective, le système redémarre de l'état neuf (0,0). Son évolution ultérieure est par ailleurs supposée indépendante de son passé. Le processus $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ apparaît alors comme un processus régénératif, les instants de régénération étant les instants de maintenance, la longueur d'un cycle étant égale à $\sigma_M + \tau$. Ceci est illustré dans la Figure 2, où la dégradation est indiquée de manière univariée, pour plus de lisibilité. Dans le premier cycle, les ensembles M et L sont atteints simultanément ($\sigma_L^{(1)} = \sigma_M^{(1)}$). Ceci est possible car, comme les processus Gamma univariés, un processus Gamma bivarié est un processus de sauts purs, qui n'évolue que par sauts. La taille des sauts n'est par ailleurs pas bornée et un saut qui engendre l'atteinte de la zone M peut amener le processus dans la zone L simultanément. Le système est ensuite remis à neuf à l'instant $\sigma_M^{(1)} + \tau$. Lors du deuxième cycle, le système est remplacé avant de tomber en panne ($\sigma_L^{(2)} > \sigma_M^{(2)} + \tau$).

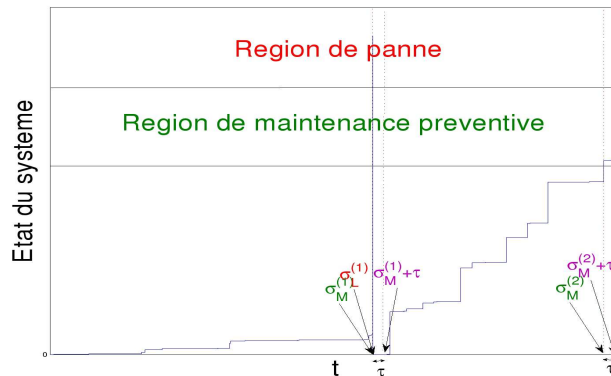


Figure 2. La politique de maintenance préventive

Notons que dans le cas où $M = L$, l'équipe de maintenance est appelée lorsque le système tombe en panne. On retrouve donc le modèle initial, c'est-à-dire le cas sans maintenance préventive. Dans le cas où $M = R_+ \times R_+$, l'équipe de maintenance est « appelée » dès qu'elle a fini de réparer le système. Elle met ensuite une durée τ pour revenir réparer (instantanément) le système. On obtient donc une politique de remplacement périodique classique, qui apparaît donc comme un cas particulier de la politique de maintenance préventive proposée.

La politique de maintenance préventive est évaluée à l'aide du coût asymptotique unitaire C_∞ , défini par

$$C_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t},$$

où $C(t)$ est le coût accumulé sur l'intervalle $[0, t]$.

Ce coût prend en compte :

- C_1 : le coût de restauration du système (que la maintenance soit préventive ou corrective),
- C_2 : le coût unitaire (par unité de temps) d'indisponibilité du système lorsqu'il est en panne.

Pour compléter l'évaluation de la politique de maintenance préventive, nous utilisons aussi un autre critère, la disponibilité asymptotique, définie par :

$$A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t}$$

où $U(t)$ est la durée de disponibilité cumulée sur l'intervalle $[0, t]$.

L'objectif de ce travail est de :

- calculer le coût et la disponibilité asymptotiques C_∞ et A_∞ ,
- étudier l'influence du délai τ sur les performances de la politique de maintenance,
- comprendre l'influence de la dépendance entre les deux indicateurs de dégradation et de la forme des zones de panne et de maintenance sur la politique de maintenance optimale.

Les résultats théoriques

4 Calcul du coût et de la disponibilité asymptotiques

Le processus $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ étant régénératif, la théorie du renouvellement nous permet d'écrire que

$$C_\infty = \frac{E(C(T_1))}{E(T_1)} \text{ et } A_\infty = \frac{E(U(T_1))}{E(T_1)},$$

où T_1 représente la longueur du premier cycle. Ainsi que nous l'avons signalé dans le paragraphe 3, le système est renouvelé à l'instant $\sigma_M + \tau$, de sorte que $T_1 = \sigma_M + \tau$. De même, la durée d'indisponibilité sur le premier cycle est $(\sigma_M + \tau - \sigma_L)^+$. Le coût asymptotique unitaire et la disponibilité asymptotique sont donc égaux à :

$$C_{\infty} = \frac{C_1 + C_2 E[(\sigma_M + \tau - \sigma_L)^+]}{E[\sigma_M] + \tau}$$

et

$$A_{\infty} = 1 - \frac{E[(\sigma_M + \tau - \sigma_L)^+]}{E[\sigma_M] + \tau}$$

Dans le cas où $M = L$ (cas sans maintenance préventive, $\sigma_M = \sigma_L$), on obtient :

$$C_{\infty}^{mi} = \frac{C_1 + C_2 \tau}{E[\sigma_L] + \tau}, \quad A_{\infty}^{mi} = 1 - \frac{\tau}{E[\sigma_L] + \tau} = \frac{E[\sigma_L]}{E[\sigma_L] + \tau}.$$

et dans le cas où $M = R_+ \times R_+$ (remplacement périodique, $\sigma_M = 0$) :

$$C_{\infty}^{PR} = \frac{C_1 + C_2 E[(\tau - \sigma_L)^+]}{\tau}, \quad A_{\infty}^{PR} = 1 - \frac{E[(\tau - \sigma_L)^+]}{\tau} = \frac{E[\min(\sigma_L, \tau)]}{\tau}.$$

Dans le cas général, afin d'explicitier C_{∞} et A_{∞} sous une forme calculable, nous introduisons diverses notations. Nous posons ainsi

$$h(M) = E(\sigma_M),$$

$$g_L(M) = E[(\sigma_L - \sigma_M - \tau)^+].$$

En remarquant que

$$E[(\sigma_M + \tau - \sigma_L)^+] = g_L(M) + h(M) + \tau - h(L)$$

(voir détails dans [6]), on obtient

$$C_{\infty} = C_2 + \frac{C_1 + C_2 (g_L(M) - h(L))}{h(M) + \tau},$$

$$A_{\infty} = \frac{h(L) - g_L(M)}{h(M) + \tau}$$

et il ne reste plus qu'à expliciter $h(M)$ et $g_L(M)$.

En ce qui concerne $h(M)$, on obtient facilement :

$$h(M) = \int_0^{\infty} \overline{G}_t(M) dt$$

où $\overline{G}_t(M) = P(X_t \notin M)$.

Pour $g_L(M)$, en notant

$$L - x = \{(y_1 - x_1, y_2 - x_2) \mid (y_1, y_2) \in L\} \text{ pour tout } x = (x_1, x_2) \notin L,$$

on a :

$$g_L(M) = \int_0^{\infty} \int_M \overline{G}_t(L - x) f_{X_t}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 dt$$

(voir détails dans [6]), où $f_{X_t}(x_1, x_2)$ est donnée par (*).

Il ne reste plus qu'à expliciter $\overline{G}_t(M)$ qui a une expression différente selon la forme (commune) de L et M .

Dans le cas 1 (système série), on a $M = R_+^2 / [0, M_1] \times [0, M_2]$ et

$$\overline{G}_t(M) = F_{X_t}(M_1, M_2).$$

Dans le cas 2 (système parallèle), on a $M = [M_1, \infty[\times [M_2, \infty[$ et

$$\overline{G}_t(M) = 1 - \overline{F}_{X_t}(M_1, M_2).$$

Dans le cas 3, on a $M = \{(x_1, x_2) \in R_+^2 : x_1 + x_2 \geq m\}$ et

$$\overline{G}_t(M) = \iint_{R_+^2 \setminus M} f_{X_t}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Ces formules nous permettent de calculer $h(M)$ et $g_L(M)$, et donc C_{∞} et A_{∞} .

5 Comparaisons

Nous donnons ici quelques résultats de comparaisons entre la politique de maintenance proposée, le cas sans maintenance préventive (cas initial) et une politique de maintenance purement périodique. Les démonstrations des résultats peuvent être trouvées dans [6] (article soumis).

Lorsque le coût de restauration est grand par rapport au coût d'indisponibilité, ou plus précisément lorsque

$$\frac{C_1}{C_2} \geq E[\min(\tau, \sigma_L)],$$

nous montrons que le coût associé à la politique de maintenance préventive proposée (MP) est toujours inférieur à celui associé à une politique de maintenance périodique, quel que soit l'ensemble M choisi. Puisque le cas initial est un cas particulier de la politique MP, le coût initial est donc lui aussi toujours inférieur à celui d'une maintenance périodique.

Lorsque le rapport entre le coût de restauration et le coût d'indisponibilité est encore plus grand, à savoir si

$$\frac{C_1}{C_2} \geq E(\sigma_L),$$

on montre alors que le coût initial est inférieur au coût de la maintenance MP et il est préférable de n'appeler l'équipe de maintenance qu'à l'instant de panne.

Sous la condition $\frac{C_1}{C_2} \geq E(\sigma_L)$, on a donc :

$$C_\infty^{(mi)} \leq C_\infty \leq C_\infty^{PR}$$

En conséquence de quoi, la seule situation où la politique MP peut être intéressante pour diminuer le coût est le cas où

$$\frac{C_1}{C_2} < E(\sigma_L)$$

6 L'influence du délai sur le coût asymptotique

Bien que le délai τ soit en général fixé par le contexte applicatif (et correspond au temps nécessaire à l'équipe de maintenance pour être prêt à opérer), nous considérons ici que τ peut varier, afin de mieux comprendre son influence sur le coût de fonctionnement du système. On écrit alors $C_\infty(\tau)$ au lieu de C_∞ . Là encore, les démonstrations des résultats peuvent être trouvés dans [6].

Lorsque le coût de remplacement est cher ($E(\sigma_L) < \frac{C_1}{C_2}$), on montre alors que le coût est décroissant par rapport à τ . Dans ce cas, il est

préféré d'appeler l'équipe de maintenance le plus tard possible. Cela signifie que, d'un point de vue coût de fonctionnement, le mieux est de ne jamais réparer le système. Même si nous rajoutons une partie bénéfice dans la fonction de coût (par exemple un bénéfice par unité de temps lorsque le système est en marche), ceci serait toujours vrai et en cas de coût de remplacement très élevé, le système fonctionnerait toujours à perte. S'il y a malgré tout un intérêt au fonctionnement du système (qui peut être la satisfaction d'un client par exemple), il faut alors contrôler un autre indicateur, du type disponibilité du système. On vérifie facilement que, comme on pouvait s'y attendre, cette disponibilité est une fonction décroissante du délai τ . La valeur optimale de τ peut alors être obtenue en optimisant la fonction de coût

sous une contrainte de disponibilité. Sous la condition $E(\sigma_L) < \frac{C_1}{C_2}$, cette valeur optimale est obtenue en prenant le plus grand τ qui vérifie

la contrainte. Selon le contexte applicatif, on pourrait aussi choisir de maximiser la disponibilité sous une contrainte de coût, c'est-à-dire choisir le plus petit τ qui vérifie la contrainte.

Dans le cas où $E(\sigma_L) \geq \frac{C_1}{C_2}$, deux situations sont possibles :

- si $E(\sigma_M)P(\sigma_L = \sigma_M) \geq \frac{C_1}{C_2}$, le coût est alors croissant par rapport à τ . Dans ce cas, le mieux est de réparer le système le plus rapidement possible, que ce soit d'un point de vue coût ou disponibilité.
- si $E(\sigma_M)P(\sigma_L = \sigma_M) < \frac{C_1}{C_2} \leq E(\sigma_L)$, la fonction de coût $C_\infty(\tau)$ admet un unique minimum en un unique τ_M . D'un point de vue du coût, le mieux est alors que l'équipe de maintenance arrive au bout d'une durée τ_M pour réparer le système, la disponibilité restant, quant à elle, une fonction décroissante de τ .

Quelques expériences numériques

7 Validation des formules théoriques

Afin de valider les formules théoriques du paragraphe 4, nous calculons C_∞ et A_∞ sur quelques exemples, d'une part à l'aide de ces formules, d'autre à l'aide de simulations de Monte-Carlo (avec 104 histoires). Nous prenons trois exemples différents, correspondant chacun à l'une des formes d'ensembles L et M envisagées dans le paragraphe 2. (Les ensembles L et M sont, à chaque fois, pris de la même forme).

Cas 1 (système en série) On prend $a_1 = 4, a_2 = 5, \rho = 0.6708, \tau = 0.1, M_1 = 3.4, M_2 = 2.4, L_1 = 3.5, L_2 = 2.5, C_1 = 100, C_2 = 30$. Les résultats sont donnés dans le tableau 1.

	Formule analytique	Simulation MC	Intervalle de confiance à 95% (MC)
C_∞	154.21612	154.38232	[152.79936 155.96529]
A_∞	0.87203	0.87245	[0.85885 0.88604]

Tableau 1. Comparaison avec simulation MC, Cas 1 (système en série)

Cas 2 (système en parallèle) On prend $a_1 = 7, a_2 = 9, \rho = 0.75, \tau = 0.1, M_1 = 2.9, M_2 = 2.3, L_1 = 3.5, L_2 = 2.5, C_1 = 100, C_2 = 30$. Les résultats sont donnés dans le tableau 2.

	Formule analytique	Simulation MC	Intervalle de confiance à 95% (MC)
C_∞	172.60371	171.04858	[168.722395 173.3732]
A_∞	0.91734	0.91791	[0.90132 0.93450]

Table 2. Comparaison avec simulation MC, Cas 2 (système en parallèle)

Cas 3 On prend $a_1 = 4, a_2 = 9, \rho = 0.4, \tau = 0.1, m = 2.4, l = 3.5, C_1 = 3, C_2 = 1$. Les résultats sont donnés dans le tableau 3.

	Formule analytique	Simulation MC	Intervalle de confiance à 95% (MC)
C_∞	9.0611	9.0461	[8.6960 9.3961]
A_∞	0.8750	0.8738	[0.8407 0.9069]

Table 3. Comparaison avec simulation MC, Cas 3

Les résultats analytiques appartiennent à chaque fois aux intervalles de confiance à 95% obtenus par simulation de Monte-Carlo, ce qui valide nos résultats.

8 Exemples

Ce paragraphe présente différentes expériences numériques. Pour chaque exemple, les différents paramètres ainsi que la forme (commune) de L et de M sont donnés dans le tableau 4. Là encore, les cas 1, 2, 3 font référence aux différentes formes envisagées au paragraphe 2.

	a_1	a_2	ρ	τ	Forme de M et L	L_1 (ou l)	L_2	M_1 (ou m)	M_2	C_1	C_2
Ex. 1	4	9	0.5	-	Cas 1	3.5	2.5	2.8	2	-	1
Ex. 2	7	9	0.76	0.1	Cas 2	3.5	2.5	-	-	-	1
Ex. 3	4	9	-	0.1	Cas 1	3.5	2.5	2.8	2	20	-
	7	9	-	0.1	Cas 2	3.5	2.5	2.9	2.3	20	-
Ex. 4	4	-	-	0.1	Cas 3	3.5	-	2.4	-	1	-

Table 4. Paramètres et forme de L et M pour les différents exemples

8.1 Exemple 1

Deux valeurs différentes de C_1 sont considérées : $C_1 = 0.198$ et $C_1 = 0.594$. Le coût C_∞ est tracé en fonction du délai τ dans la figure 3 pour ces deux valeurs. Dans le premier cas (Figure 3a), C_1 satisfait $\frac{C_1}{C_2} < E(\sigma_L)$ et le coût asymptotique unitaire admet un unique minimum en $\tau^{opt} \approx 0.0625$. Dans le deuxième cas, on a $\frac{C_1}{C_2} > E(\sigma_L)$ et le coût asymptotique unitaire est décroissant en τ . Le coût minimum est donc obtenu pour $\tau = \infty$, et, du point de vue du coût, le mieux est de ne jamais réparer le système. Ainsi que nous l'avons dit dans le paragraphe 6, nous devons donc contrôler la disponibilité asymptotique, qui est tracée dans la figure 3c. Conformément aux résultats théoriques, nous observons que cette disponibilité décroît avec τ . Si nous avons une contrainte de disponibilité du type $A_\infty \geq 0.9$ (pour assurer la satisfaction des clients par exemple), la valeur optimale de τ qui minimise le coût est la plus grande valeur de τ qui satisfait cette contrainte, à savoir $\tau_0 \approx 0.075$.

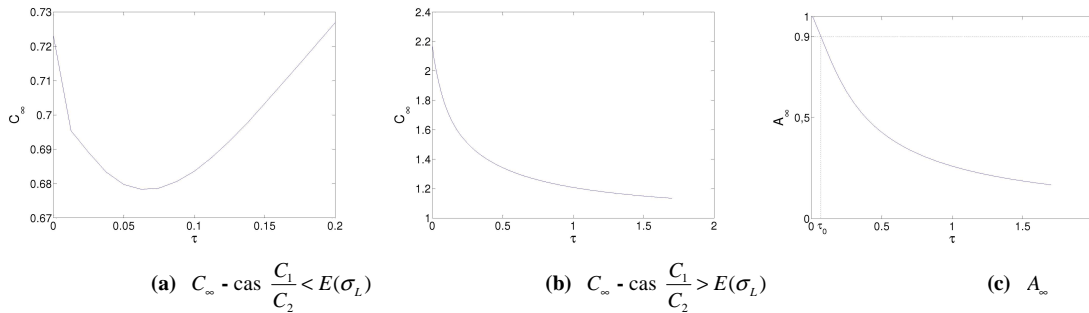


Figure 3. Exemple 1 : C_∞ et A_∞ en fonction de τ

8.2 Exemple 2

Deux valeurs différentes de C_1 sont considérées : $C_1 = 0.15$ et $C_1 = 2$. Le coût C_∞ est tracé en fonction de (M_1, M_2) dans la figure 4 pour ces deux valeurs. Dans le premier cas (Figure 4a), C_1 satisfait $\frac{C_1}{C_2} < E(\sigma_L)$ et le coût admet un minimum en $(M_1^{opt}, M_2^{opt}) = (2.8, 1.8)$. Dans le deuxième cas (Figure 4b), on a $\frac{C_1}{C_2} > E(\sigma_L)$ et le coût admet un minimum en (L_1, L_2) , ce qui signifie que le mieux, d'un point de vue coût, est de ne pas maintenir préventivement le système.

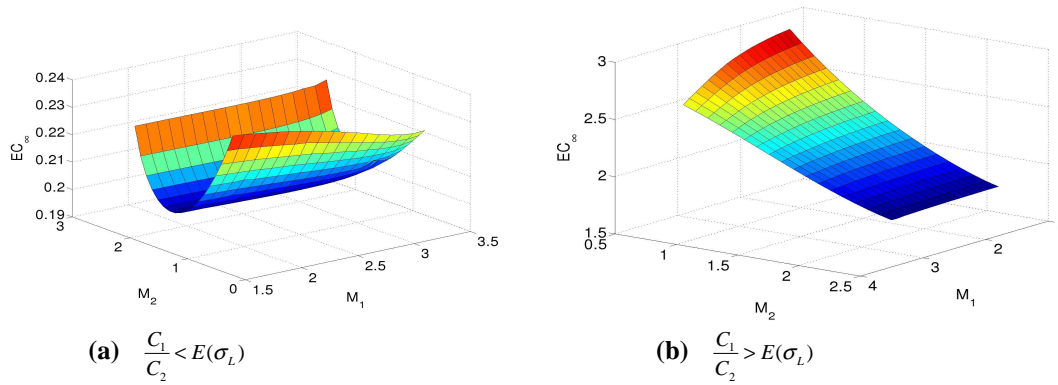


Figure 4. Exemple 2 : C_∞ en fonction de (M_1, M_2)

8.3 Exemple 3

Trois valeurs différentes de C_2 sont considérées : $C_2 = 4, C_2 = 20, C_2 = 30$, et deux formes différentes pour L et M . Le coût est tracé par rapport à la dépendance entre les deux processus marginaux (mesurée par ρ) dans la figure 5 dans les deux cas. Pour la première forme de L et M (qui correspond au système série), on observe que le coût est décroissant par rapport à ρ pour les trois valeurs de C_2 . Pour la deuxième forme de L et M (qui correspond au système parallèle), la monotonie est inversée (Figure 5b) et le coût est croissant par rapport à ρ .

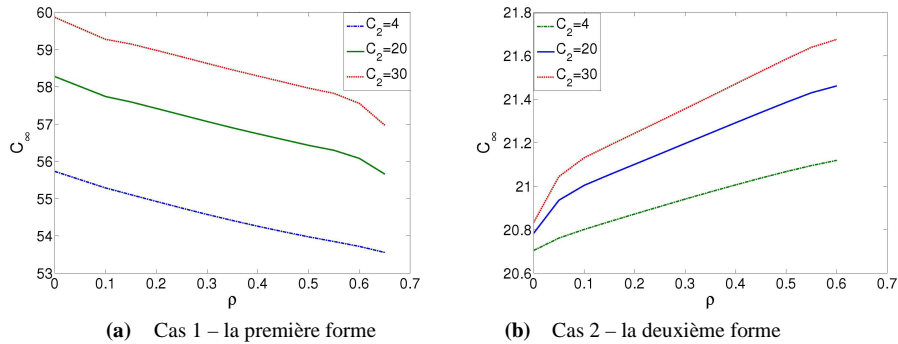
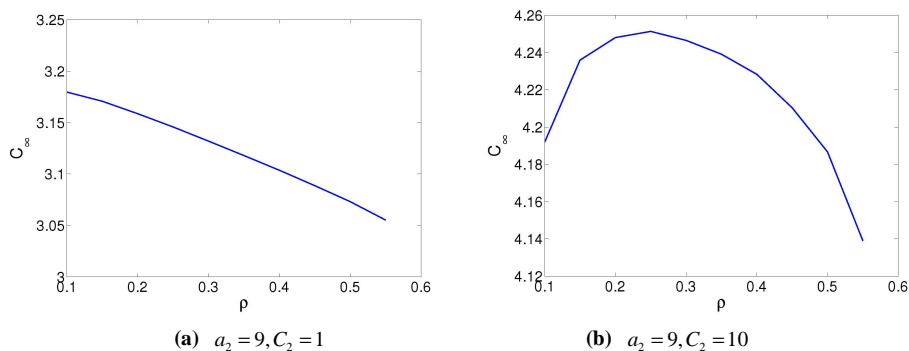


Figure 5. Exemple 3 : C_∞ en fonction de ρ

8.4 Exemple 4

On s'intéresse ici à la troisième forme de L et M et le coût est tracé par rapport à la dépendance (ρ) pour quatre couples (a_2, C_2) différents dans la figure 6, avec $(a_2, C_2) \in \{(9,1), (9,10), (4,30), (4,7)\}$. Sur ces figures, on constate que la dépendance a une influence claire sur les fonctions de coût. En revanche, on peut observer que, selon les cas, le coût peut être croissant, décroissant, concave ou convexe par rapport à ρ . Il semble donc difficile de prédire le comportement de la fonction du coût par rapport à la dépendance et celui-ci doit être étudié au cas par cas.



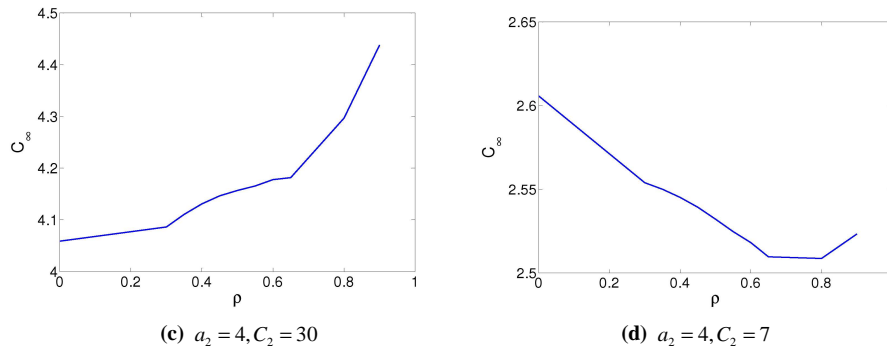


Figure 6. Fonction C_∞ par rapport à ρ , cas 3 – la troisième forme, Exemple 4

Conclusion

Nous nous sommes intéressés à une politique de maintenance préventive pour un système soumis à une surveillance continue et parfaite, dont la dégradation est mesurée par un couple d'indicateurs, modélisée par un processus Gamma bivarié. La politique de maintenance a été évaluée à l'aide d'une fonction de coût sur un horizon infini, complétée par la disponibilité asymptotique. Nous avons des conditions suffisantes sous lesquelles la politique de maintenance préventive proposée est toujours meilleure qu'une politique de maintenance périodique, ainsi que des conditions nécessaires pour que la maintenance préventive diminue le coût d'utilisation du système. Nous avons aussi étudié l'influence du délai d'intervention sur la politique optimale. Nous avons en particulier montré que, si le coût est le seul critère d'intérêt, le délai d'intervention ne doit pas nécessairement être le plus court possible.

En ce qui concerne l'influence de la dépendance entre indicateurs sur la fonction de coût, nous avons observé numériquement que cette influence est fortement liée à la forme des zones de panne et de maintenance préventive : pour certaines formes, la fonction de coût est croissante par rapport à la dépendance (cas de deux composants en parallèle) ; pour d'autres, elle est décroissante (cas de deux composants en série) ; pour d'autres encore, elle peut même être non monotone (forme générale pour L). Au vu des résultats obtenus, nous pouvons d'ores et déjà conclure que la dépendance entre indicateurs et la forme des régions de panne et de maintenance préventive ont une forte influence sur la fonction de coût et sur la politique optimale. Négliger la dépendance entre indicateurs (comme cela est fait fréquemment pour le moment), peut donc conduire à des résultats erronés. De plus, lorsque l'on n'est pas capable d'estimer la dépendance entre les indicateurs de dégradation (lorsque l'on ne dispose pas de données suffisantes par exemple), l'attitude la plus conservatrice dépend fortement de la forme des zones d'intérêt. Dans certains cas, il faudra considérer les indicateurs comme indépendants, alors que dans d'autres, il faudra les considérer comme complètement dépendants. Dans d'autres cas encore, la fonction de coût maximale (i.e. la « pire »), sera obtenue pour une corrélation bien spécifique. Ceci montre la complexité de l'influence de la dépendance sur le choix de la politique de maintenance à adopter. Cela signifie aussi qu'il est nécessaire de continuer le travail initié ici et de revisiter les politiques de maintenance classiques dans ce nouveau cadre bivarié, qui tient compte de la dépendance entre indicateurs.

9 Remerciement

Hai Ha PHAM remercie le Conseil Régional d'Aquitaine (France) qui prend en charge sa recherche. Ce travail a également reçu le soutien de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR), projet AMMSI, réf. ANR 2011 BS01-021.

10 Références

- [1] Van Noortwijk, J. (2009). A survey of the application of Gamma processes in maintenance. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* **94**(1): 2-21.
- [2] Mercier S., Meier-Hirmer C., Roussignol M. (2010), *Modélisation de la géométrie d'une voie ferrée par un processus Gamma bivarié et application à la maintenance*, Actes du Congrès Lambda-Mu 17, La Rochelle, France, Oct. 2010.
- [3] Mercier S., Meier-Hirmer C. & Roussignol M. (2011), Bivariate Gamma wear processes for track geometry modelling, with application to intervention scheduling. *Struct. Infrastruct* **8**(4) : 357-366.
- [4] Bérenguer C., Grall A., Dieulle L., & Roussignol M. (2003), Maintenance policy for a continuously monitored deteriorating system. *Probab. Engrg. Inform. Sci.* **17**(2): 235-250.
- [5] Buijs, F. A., Hall, J. W., Van Noortwijk, J. M. and Sayers, P. B. (2005). *Time dependent reliability analysis of flood defences using gamma processes*, in G. Augusti, G. I. Schueller and M. Ciampoli (eds.), Safety and Reliability of Engineering Systems and Structures; Proceedings of the Ninth International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR), Rome, Italy, 19-23 June 2005 (Millpress, Rotterdam), pp. 2209--2216.
- [6] Mercier, S., Pham, H.H. (2012), A preventive maintenance policy for a continuously monitored system with correlated wear indicators (in revision for *European Journal of Operational Research*).