

MODÉLISATION DE LA GÉOMÉTRIE D'UNE VOIE FERRÉE PAR UN PROCESSUS GAMMA BIVARIÉ ET APPLICATION À LA MAINTENANCE

MODELLING TRACK GEOMETRY BY A BIVARIATE GAMMA WEAR PROCESS, WITH APPLICATION TO MAINTENANCE

Sophie Mercier
LMA-Pau, Université de Pau et des Pays de l'Adour
Avenue de l'Université - BP 1155
64013 Pau Cedex
sophie.mercier@univ-pau.fr

Carolina Meier-Hirmer
Infrapôle Paris-Saint-Lazare, SNCF
147, rue Cardinet
75017 Paris

Michel Roussignol
LAMA, Université Paris-Est, 5, boulevard Descartes
77454 Marne-la-Vallée Cedex 2

Résumé

Un processus Gamma bivarié est utilisé pour modéliser l'évolution de deux indicateurs de détérioration. Dans l'optique de la mise en place d'une maintenance préventive, le temps optimal entre inspection et intervention est déterminé. Des estimateurs du maximum de vraisemblance sont calculés en utilisant un algorithme EM et appliqués sur des données réelles de deux indicateurs de détérioration de voies ferrées. Le temps optimal obtenu en utilisant le modèle bivarié s'avère être plus sûr que celui obtenu avec un seul indicateur ou les deux pris séparément, ce qui montre l'intérêt d'un modèle bivarié.

Summary

A bivariate gamma process is used to model the development of two deterioration indicators. With the aim to define a preventive maintenance policy, an optimal time between inspection and intervention is computed. Maximum likelihood estimators of the model parameters are computed, using an EM algorithm. This model is fitted to real data of two railway track deterioration indicators. The time between inspection and intervention obtained using the bivariate model is safer than the one obtained with one single indicator or both taken separately, which shows the interest of bivariate models.

Introduction

À la SNCF, la géométrie d'une voie ferrée est synthétisée à l'aide de différents indicateurs, dont le nivellement longitudinal (NL) et le nivellement transversal (NT). La politique de maintenance préventive utilisée actuellement est basée sur le seul NL. Nous nous proposons de regarder ici si une politique de maintenance basée à la fois sur le NL et le NT ne serait pas plus pertinente.

Meier-Hirmer *et al.* 2009 ont modélisé l'évolution du NL par un processus Gamma univarié (van Noortwijk 2009). Nous nous proposons d'utiliser ici un modèle de dégradation bivarié croissant pour modéliser l'évolution conjointe du couple (NL, NT). Le modèle utilisé est similaire à celui de Buijs *et al.* 2005, où les auteurs construisent un processus Gamma bivarié par la méthode de réduction trivariée (Devroye 1986). Un tel processus admet des processus Gamma univariés comme processus marginaux. Une fois ce modèle défini, nous nous intéressons à une politique de maintenance préventive, définie de la manière suivante : étant donné un niveau de dégradation observé lors d'une inspection, le problème est de voir comment choisir la date de la prochaine intervention, de telle sorte que la voie ne se dégrade pas trop (ni NL, ni NT) avant que la prochaine inspection n'ait eu lieu, et ce, avec une grande probabilité. Les inspections ont lieu d'une façon régulière et sont programmées en avance. Les interventions préventives sont à planifier d'une manière optimale. D'un côté, les interventions doivent être effectuées avant que les indicateurs ne dépassent un certain seuil. D'un autre côté, les interventions coûtent cher et ne peuvent pas être effectuées en nombre illimité.

Nous proposons ensuite des méthodes d'estimation des paramètres du modèle par maximum de vraisemblance, que nous ajustons à nos données.

Ces travaux ont déjà été présentés lors du Symposium dédié à Jan van Noortwijk, qui a eu lieu à Delft le 24 novembre 2009 (Mercier *et al.* 2009).

Le processus Gamma bivarié

Pour modéliser l'évolution conjointe de deux indicateurs de dégradation, nous allons construire un processus aléatoire bivarié dont les deux processus marginaux sont des processus Gamma univariés.

Rappelons qu'un processus Gamma univarié (homogène) $(Y_t)_{t \geq 0}$ de paramètres $(\alpha, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ est un processus à accroissements indépendants tel que $Y_t - Y_0$ suit la loi Gamma $\Gamma(\alpha t, b)$ de densité

$$f_{\alpha t, b}(x) = \frac{b^{\alpha t}}{\Gamma(\alpha t)} x^{\alpha t - 1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

On a $\mathbb{E}(Y_t - Y_0) = \frac{\alpha t}{b}$ et $\text{Var}(Y_t - Y_0) = \frac{\alpha t}{b^2}$ pour tout $t > 0$ (voir van Noortwijk 2009 pour plus de précisions).

En suivant Buijs *et al.* 2005, un processus Gamma bivarié $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ est construit par réduction trivariée : partant de trois processus Gamma univariés indépendants $(Y_t^{(i)})_{t \geq 0}$ de paramètres $(\alpha_i, 1)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et de $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, on définit :

$$X_t^{(1)} = (Y_t^{(1)} + Y_t^{(3)})/b_1, \quad \text{et} \quad X_t^{(2)} = (Y_t^{(2)} + Y_t^{(3)})/b_2 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Le processus $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ est alors un processus homogène en temps à accroissements indépendants et est un processus de Lévy. Les processus marginaux de $(X_t)_{t \geq 0}$ sont des processus Gamma univariés de paramètres respectifs (a_i, b_i) , où $a_i = \alpha_i + \alpha_3$ pour $i = 1, 2$.

Pour tout processus de Lévy bivarié, le coefficient de corrélation linéaire ρ_{X_t} de $X_t^{(1)}$ et $X_t^{(2)}$ est indépendant de t . Pour le processus Gamma bivarié X_t , on obtient :

$$\rho = \rho_{X_t} = \frac{\alpha_3}{\sqrt{a_1 a_2}}$$

et

$$\alpha_1 = a_1 - \rho\sqrt{a_1 a_2}, \quad \alpha_2 = a_2 - \rho\sqrt{a_1 a_2}, \quad \alpha_3 = \rho\sqrt{a_1 a_2}.$$

Cela implique

$$0 \leq \rho \leq \rho_{\max} = \frac{\min(a_1, a_2)}{\sqrt{a_1 a_2}} \quad [1]$$

(voir Devroye 1986 section XI.3 pour des résultats sur les lois Gamma bivariées).

Cela amène à deux paramétrisations équivalentes du processus Gamma bivarié : $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$ et $(a_1, a_2, b_1, b_2, \rho)$.

Avec la paramétrisation $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$, la densité de probabilité conjointe de X_t est égale à :

$$\begin{aligned} g_t(x_1, x_2) &= b_1 b_2 \int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} f_{\alpha_1 t, 1}(b_1 x_1 - x_3) f_{\alpha_2 t, 1}(b_2 x_2 - x_3) f_{\alpha_3 t, 1}(x_3) dx_3, \\ &= \frac{b_1 b_2 e^{-b_1 x_1 - b_2 x_2}}{\Gamma(\alpha_1 t) \Gamma(\alpha_2 t) \Gamma(\alpha_3 t)} \\ &\times \int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} (b_1 x_1 - x_3)^{\alpha_1 t - 1} (b_2 x_2 - x_3)^{\alpha_2 t - 1} x_3^{\alpha_3 t - 1} e^{-x_3} dx_3. \end{aligned} \quad [2]$$

Le processus Gamma bivarié ainsi construit n'est pas le seul processus de Lévy admettant comme processus marginaux des processus Gamma univariés. Son intérêt est la connaissance explicite de la densité conjointe $g_t(x_1, x_2)$ à chaque temps t .

Politique d'intervention

Pour illustrer l'intérêt de la modélisation de la section précédente, nous allons définir une politique d'intervention en vue d'une maintenance préventive lorsque l'on dispose de deux indicateurs de dégradation modélisés par le processus Gamma bivarié $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ construit ci-dessus.

Nous supposons qu'il existe pour chaque indicateur un seuil de détérioration s_i ($i = 1, 2$) tel que le système est considéré comme trop dégradé si $X_t^{(i)} \geq s_i$.

Le système est inspecté à des temps successifs. Au cours d'une inspection deux situations peuvent se produire. Si l'un des indicateurs est supérieur ou égal à son seuil s_i , une maintenance corrective est effectuée. Si les deux indicateurs sont inférieurs à leurs seuils respectifs, la date de la prochaine intervention préventive est déterminée en fonction de l'état de dégradation observé. Définir une politique d'intervention consiste à se donner une méthode de choix de la prochaine date d'intervention qui soit la plus tardive possible pour minimiser les coûts d'intervention. La probabilité d'être dégradé à cette date doit être faible pour minimiser les coûts et les impacts sur la disponibilité de la maintenance corrective. Une fois cette politique d'intervention définie, il reste à décider des seuils de maintenance préventive pour minimiser un coût global de maintenance. Ce dernier point n'est pas abordé dans cet article.

Par commodité, nous allons prendre comme temps d'inspection $t = 0$. Soit $0 < \epsilon < 1$ une valeur de probabilité donnée. Nous allons chercher un temps τ^B pour la prochaine intervention tel que :

$$\tau^B = \max \left(\tau \geq 0 \text{ tel que } \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left(X_\tau^{(1)} < s_1, X_\tau^{(2)} < s_2 \right) \geq 1 - \epsilon \right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left(X_t^{(1)} < s_1, X_t^{(2)} < s_2 \right) &= \mathbb{P}_{(0,0)} \left(X_t^{(1)} < s_1 - x_1, X_t^{(2)} < s_2 - x_2 \right), \\ &= \int_0^{s_1 - x_1} \int_0^{s_2 - x_2} g_t(y_1, y_2) dy_1 dy_2,\end{aligned}$$

où g_t est la densité de probabilité de X_t (voir [2]). Cette quantité est une fonction de t continue et strictement décroissante, donc τ^B est l'unique solution de l'équation :

$$\mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left(X_{\tau^B}^{(1)} < s_1, X_{\tau^B}^{(2)} < s_2 \right) = \int_0^{s_1 - x_1} \int_0^{s_2 - x_2} g_{\tau^B}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = 1 - \epsilon.$$

Si l'on ne dispose que d'un indicateur de détérioration $X_t^{(i)}$, on peut définir de la même manière le temps τ^i de la prochaine intervention par :

$$\tau^{(i)} = \max \left(\tau \geq 0 \text{ tel que } \mathbb{P}_{x_i} \left(X_\tau^{(i)} > s_i \right) \geq 1 - \epsilon \right).$$

Le temps $\tau^{(i)}$ est solution de l'équation

$$\mathbb{P}_{x_i} \left(X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i \right) = F_{a_i \tau^{(i)}, b_i}(s_i - x_i) = 1 - \epsilon$$

où $F_{a_i t, b_i}(x)$ est la fonction de répartition de la loi Gamma $\Gamma(a_i t, b_i)$.

Si l'on dispose des deux indicateurs $X_t^{(1)}$ et $X_t^{(2)}$ sans connaître leur structure bivariée, il semble raisonnable de prendre comme date d'intervention

$$\tau^U = \min \left(\tau^{(1)}, \tau^{(2)} \right),$$

ce qui s'écrit de manière équivalente

$$\tau^U = \max \left(\tau \geq 0 \text{ tel que } \mathbb{P}_{x_1} \left(X_\tau^{(1)} < s_1 \right) \geq 1 - \epsilon \text{ et } \mathbb{P}_{x_2} \left(X_\tau^{(2)} < s_2 \right) \geq 1 - \epsilon \right).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}1 - \epsilon &= \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left(X_{\tau^B}^{(1)} < s_1, X_{\tau^B}^{(2)} < s_2 \right) \\ &\leq \min \left(\mathbb{P}_{x_1} \left(X_{\tau^B}^{(1)} < s_1 \right), \mathbb{P}_{x_2} \left(X_{\tau^B}^{(2)} < s_2 \right) \right),\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\tau^B \leq \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}) = \tau^U$.

Notre but est de comparer τ^B et τ^U ainsi que de comprendre l'influence de la dépendance entre les deux composantes du processus sur τ^B . Pour cela nous allons faire des expériences numériques avec des valeurs de paramètres correspondant aux valeurs rencontrées dans nos données SNCF.

Avec $a_1 = 0.03$, $b_1 = 20$, $\epsilon = 0.5$, $s_1 = s_2 = 1$ et différentes valeurs pour a_2 , b_2 , x_1 , x_2 , la table 1 donne les valeurs correspondantes pour ρ_{\max} (donné par [1]) et pour $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, τ^U .

| | a_1 | a_2 | b_1 | b_2 | x_1 | x_2 | ρ_{\max} | $\tau^{(1)}$ | $\tau^{(2)}$ | τ^U |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|--------------|--------------|----------|
| cas 1 | 0.03 | 0.03 | 20 | 20 | 0.2 | 0.2 | 1 | 341.12 | 341.12 | 341.12 |
| cas 2 | 0.03 | 0.03 | 20 | 20 | 0.2 | 0.5 | 1 | 187.32 | 341.12 | 187.32 |
| cas 3 | 0.03 | 0.04 | 20 | 20 | 0.2 | 0.2 | 0.866 | 341.12 | 255.84 | 255.84 |
| cas 4 | 0.03 | 0.04 | 20 | 20 | 0.4 | 0.2 | 0.841 | 237.33 | 255.84 | 237.33 |

Table 1 : Quatre jeux de valeurs des paramètres a_2 , b_2 , x_1 , x_2 , et les valeurs correspondantes de ρ_{\max} , $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, τ^U .

Les figures 1(a), 1(b), 1(c) et 1(d) représentent τ^B en fonction de ρ pour les différents cas de la table 1, ainsi que les valeurs correspondantes de τ^U .

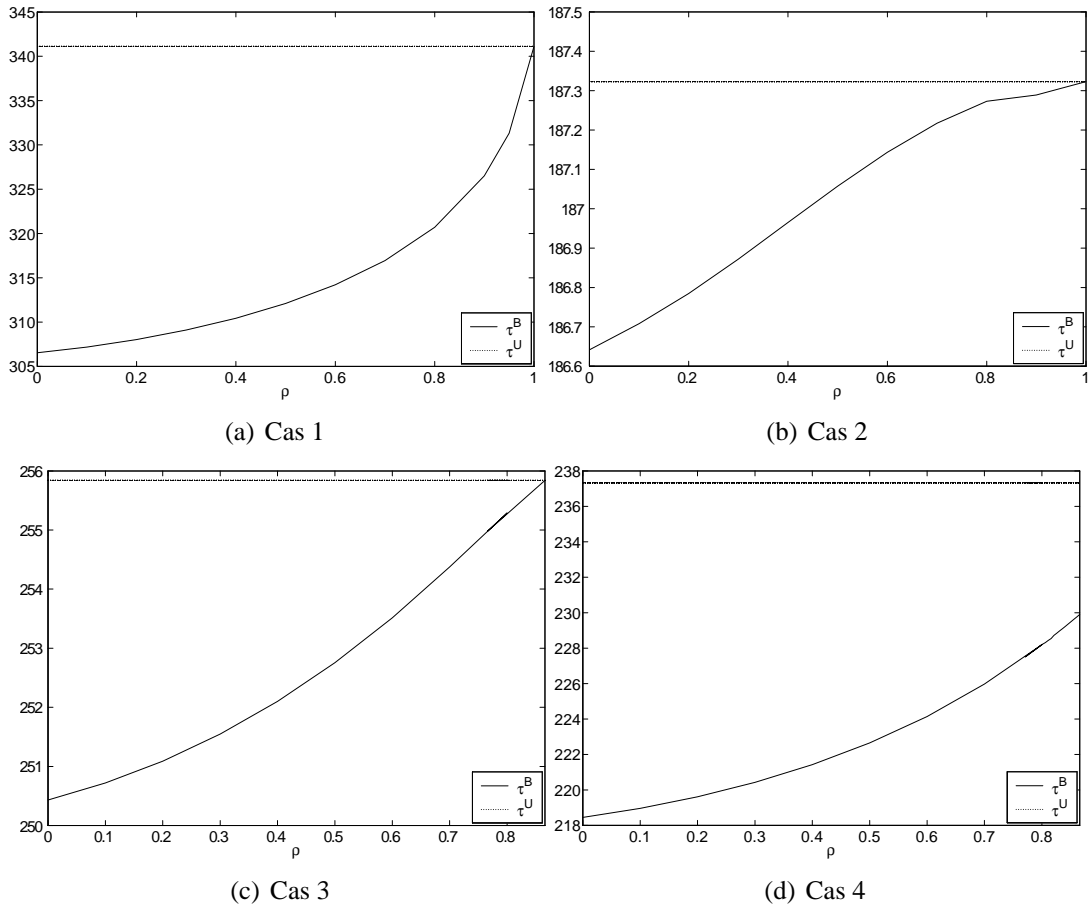


Figure 1 – τ^B et τ^U en fonction de ρ

On constate que, comme démontré ci-dessus, $\tau^B \leq \tau^U$ et que l'on peut avoir aussi bien $\tau^B = \tau^U$ que $\tau^B < \tau^U$. Dans ces figures on observe que, avec tous les autres paramètres fixés, τ^B est une fonction croissante de ρ . Dans un autre article à venir, nous allons démontrer cela théoriquement.

En conclusion, l'utilisation d'un modèle bivarié au lieu de deux modèles univariés séparés réduit en général le temps de la prochaine intervention ($\tau^B \leq \tau^U$). Cela signifie que la prise en compte de la dépendance entre les composantes donne des résultats plus sûrs. D'autre part, le temps optimal pour la prochaine intervention croît avec la dépendance (τ^B est une fonction croissante de ρ), ce qui implique que l'erreur faite en considérant les deux processus marginaux séparément (τ^U) est d'autant plus importante que les composantes sont moins dépendantes. Lorsque l'on ne connaît pas la corrélation, la décision la plus sûre consiste donc à supposer les deux composantes indépendantes et à choisir comme temps de la prochaine intervention $\tau = \tau^\perp$ où :

$$\tau^\perp = \max \left(\tau \geq 0 \text{ tel que } \mathbb{P}_{x_1} \left(T^{(1)} > \tau \right) \mathbb{P}_{x_2} \left(T^{(2)} > \tau \right) \geq 1 - \varepsilon \right).$$

Estimation des paramètres

Les données disponibles pour l'estimation des paramètres sont des valeurs d'accroissements du processus sur des intervalles de temps disjoints (intervalles sur une seule trajectoire ou sur différentes trajectoires indépendantes). Les données peuvent être représentées par $\left(\Delta t_j, \Delta X_j^{(1)}(\omega), \Delta X_j^{(2)}(\omega) \right)_{1 \leq j \leq n}$ où $\Delta t_j = t_j - t'_j$ correspond aux accroissements de temps et $\Delta X_j^{(i)} = X_{t_j}^{(i)} - X_{t'_j}^{(i)}$ aux accroissements marginaux associés ($i = 1, 2$). Pour des j différents, les vecteurs aléatoires $\left(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} \right)$ sont indépendants, mais n'ont pas la même loi. Les variables aléatoires $\Delta X_j^{(i)}$ ($i = 1, 2$) suivent des lois Gamma de paramètres $(a_i \Delta t_j, b_i)$. La densité de probabilité conjointe du vecteur aléatoire $\left(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} \right)$ est égal à $g_{\Delta t_j}(\cdot, \cdot)$, où t est remplacé par Δt_j dans [2].

1 Estimateurs du maximum de vraisemblance

On peut utiliser soit des estimateurs empiriques, soit des estimateurs du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres du processus Gamma bivarié, comme pour l'estimation des paramètres d'un processus Gamma univarié. Nous avons choisi d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance qui s'est avérée être la plus efficace.

Les estimateurs du maximum de vraisemblance \bar{a}_i et \bar{b}_i ($i = 1, 2$) des paramètres des processus marginaux sont solutions des équations (voir Meier-Hirmer *et al.* 2009) :

$$\frac{\bar{a}_i}{\bar{b}_i} = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta X_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j} \quad \text{et}$$

$$\left(\sum_{j=1}^n \Delta t_j \right) \times \ln \left(\bar{a}_i \frac{\sum_{j=1}^n \Delta t_j}{\sum_{j=1}^n \Delta X_j^{(i)}} \right) + \sum_{j=1}^n \Delta t_j \left(\ln(\Delta X_j^{(i)}) - \psi(\bar{a}_i \Delta t_j) \right) = 0,$$

où

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du$$

pour tout $x > 0$ (ψ est la fonction Digamma).

Ceci permet d'obtenir des estimateurs $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{a}_2$ et \bar{b}_2 des paramètres a_1, b_1, a_2 et b_2 .

Il reste à estimer un cinquième paramètre (α_3 ou ρ) par maximum de vraisemblance sur les données bivariées. Nous choisissons d'estimer α_3 . La fonction de vraisemblance associée aux données $(\Delta t_j, \Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})_{1 \leq j \leq n}$ s'écrit

$$\prod_{j=1}^n g_{\Delta t_j}(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)}).$$

Vue la forme de la fonction $g_t(\cdot, \cdot)$, il semble compliqué de trouver le maximum de la fonction de vraisemblance directement. Un algorithme EM (voir Dempster *et al.* 1977) est alors utilisé, considérant $(\Delta Y_j^{(3)} = Y_{t_j}^{(3)} - Y_{t_j'}^{(3)})_{1 \leq j \leq n}$ comme données cachées.

Pour simplifier les expressions, les valeurs des données $(\Delta t_j(\omega), \Delta X_j^{(1)}(\omega), \Delta X_j^{(2)}(\omega), \Delta Y_j^{(3)}(\omega))_{1 \leq j \leq n}$ sont notées $(t_j, x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, y_j^{(3)})_{1 \leq j \leq n}$, le vecteur aléatoire de dimension n associé $(\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \bar{Y}^{(3)})$ et le vecteur de dimension n de données associé $(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{y}^{(3)})$.

La densité de probabilité du vecteur aléatoire des données complètes $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, Y_t^{(3)})$ est égale à :

$$\begin{aligned} & b_1 b_2 f_{\alpha_1 t, 1}(b_1 x_1 - y_3) f_{\alpha_2 t, 1}(b_2 x_2 - y_3) f_{\alpha_3 t, 1}(y_3) \\ &= \frac{b_1 b_2}{\Gamma(\alpha_1 t) \Gamma(\alpha_2 t) \Gamma(\alpha_3 t)} e^{-(b_1 x_1 + b_2 x_2)} (b_1 x_1 - y_3)^{\alpha_1 t - 1} (b_2 x_2 - y_3)^{\alpha_2 t - 1} y_3^{\alpha_3 t - 1} e^{y_3}, \end{aligned}$$

avec $0 \leq y_3 \leq \min(b_1 x_1, b_2 x_2)$, $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

Alors la fonction de log-vraisemblance $Q(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{y}^{(3)})$ associée aux données complètes $(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{y}^{(3)})$ vaut :

$$\begin{aligned} & Q(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{y}^{(3)}) \\ &= n(\ln(b_1) + \ln(b_2)) - \sum_{j=1}^n (\ln \Gamma(\alpha_1 t_j) + \ln \Gamma(\alpha_2 t_j) + \ln \Gamma(\alpha_3 t_j)) - b_1 \sum_{j=1}^n x_j^{(1)} \\ & \quad - b_2 \sum_{j=1}^n x_j^{(2)} + \sum_{j=1}^n \left((\alpha_1 t_j - 1) \ln(b_1 x_j^{(1)} - y_j^{(3)}) + (\alpha_2 t_j - 1) \ln(b_2 x_j^{(2)} - y_j^{(3)}) \right. \\ & \quad \left. + (\alpha_3 t_j - 1) \ln(y_j^{(3)}) + y_j^{(3)} \right). \end{aligned}$$

Pour l'algorithme EM, on a besoin de calculer la log-vraisemblance conditionnelle des données complètes sachant les données observées :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(Q(\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \bar{Y}^{(3)}) \mid \bar{X}^{(1)} = \bar{x}^{(1)}, \bar{X}^{(2)} = \bar{x}^{(2)} \right) \\ &= n(\ln(b_1) + \ln(b_2)) - b_1 \sum_{j=1}^n x_j^{(1)} - b_2 \sum_{j=1}^n x_j^{(2)} \\ & \quad + \sum_{j=1}^n \left((\alpha_1 t_j - 1) \mathbb{E} \left(\ln(b_1 x_j^{(1)} - \Delta Y_j^{(3)}) \mid \Delta X_j^{(1)} = x_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} = x_j^{(2)} \right) \right. \\ & \quad \left. + (\alpha_2 t_j - 1) \mathbb{E} \left(\ln(b_2 x_j^{(2)} - \Delta Y_j^{(3)}) \mid \Delta X_j^{(1)} = x_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} = x_j^{(2)} \right) \right. \\ & \quad \left. + (\alpha_3 t_j - 1) \mathbb{E} \left(\ln(\Delta Y_j^{(3)}) \mid \Delta X_j^{(1)} = x_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} = x_j^{(2)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathbb{E} \left(Y_j^{(3)} \mid \Delta X_j^{(1)} = x_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} = x_j^{(2)} \right) \right) \\ & \quad - \sum_{j=1}^n (\ln \Gamma(\alpha_1 t_j) + \ln \Gamma(\alpha_2 t_j) + \ln \Gamma(\alpha_3 t_j)). \end{aligned} \tag{3}$$

Pour calculer les espérances conditionnelles qui apparaissent ci-dessus, on a besoin de la densité de probabilité conditionnelle de $Y_t^{(3)}$ sachant $X_t^{(1)} = x_1, X_t^{(2)} = x_2$. Elle est égale à :

$$\frac{f_{\alpha_1 t, 1}(b_1 x_1 - y_3) f_{\alpha_2 t, 1}(b_2 x_2 - y_3) f_{\alpha_3 t, 1}(y_3)}{\int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} f_{\alpha_1 t, 1}(b_1 x_1 - x_3) f_{\alpha_2 t, 1}(b_2 x_2 - x_3) f_{\alpha_3 t, 1}(x_3) dx_3} = \frac{(b_1 x_1 - y_3)^{\alpha_1 t - 1} (b_2 x_2 - y_3)^{\alpha_2 t - 1} y_3^{\alpha_3 t - 1} e^{y_3}}{\int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} (b_1 x_1 - x_3)^{\alpha_1 t - 1} (b_2 x_2 - x_3)^{\alpha_2 t - 1} x_3^{\alpha_3 t - 1} e^{x_3} dx_3}, \quad [4]$$

où $0 \leq y_3 \leq \min(b_1 x_1, b_2 x_2)$, $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

Le pas k de l'algorithme EM consiste à calculer une nouvelle valeur $\alpha_3^{(k+1)}$ de l'estimateur connaissant la valeur courante $\alpha_3^{(k)}$ en deux étapes :

- étape 1 : calcul des espérances conditionnelles suivantes en utilisant la densité de probabilité [4] avec les valeurs de paramètres $\alpha_1 = \bar{a}_1 - \alpha_3^{(k)}$, $\alpha_2 = \bar{a}_2 - \alpha_3^{(k)}$, $\alpha_3 = \alpha_3^{(k)}$, $b_1 = \bar{b}_1$, $b_2 = \bar{b}_2$:

$$\begin{aligned} f_1(j, \alpha_3^{(k)}) &= \mathbb{E} \left(\ln \left(\bar{b}_1 \bar{x}_j^{(1)} - \bar{Y}_j^{(3)} \right) \mid \bar{X}^{(1)} = \bar{x}_j^{(1)}, \bar{X}^{(2)} = \bar{x}_j^{(2)} \right), \\ f_2(j, \alpha_3^{(k)}) &= \mathbb{E} \left(\ln \left(\bar{b}_2 \bar{x}_j^{(2)} - \bar{Y}_j^{(3)} \right) \mid \bar{X}^{(1)} = \bar{x}_j^{(1)}, \bar{X}^{(2)} = \bar{x}_j^{(2)} \right), \\ f_3(j, \alpha_3^{(k)}) &= \mathbb{E} \left(\ln \left(\bar{Y}_j^{(3)} \right) \mid \bar{X}^{(1)} = \bar{x}_j^{(1)}, \bar{X}^{(2)} = \bar{x}_j^{(2)} \right). \end{aligned}$$

- étape 2 : calculer $\alpha_3^{(k+1)}$ solution en α_3 de l'équation :

$$\sum_{j=1}^n t_j \left(f_3(j, \alpha_3^{(k)}) - f_1(j, \alpha_3^{(k)}) - f_2(j, \alpha_3^{(k)}) \right) = \sum_{j=1}^n t_j \left(\psi(\alpha_3 t_j) - \psi((\bar{a}_1 - \alpha_3) t_j) - \psi((\bar{a}_2 - \alpha_3) t_j) \right)$$

où ψ est la fonction Digamma.

2 Tests sur des données simulées

Nous allons tester la méthode d'estimation sur des données simulées. 500 accroissements de temps $(t_j)_{1 \leq j \leq 500}$ sont choisis aléatoirement de manière à obtenir des données semblables à celles de détérioration de voies de chemins de fer (la méthode proposée sera utilisée sur ce type de données dans la section «Application à la maintenance des voies de chemin de fer»). Ensuite, 500 valeurs d'accroissements d'un processus Gamma bivarié correspondant aux accroissements de temps sont simulés avec les paramètres $a_1 = 0.33$, $a_2 = 0.035$, $b_1 = 13.5$, $b_2 = 20$ et $\rho = 0.5296$. Ces paramètres sont du même ordre de grandeur que ceux observés pour la détérioration de la voie étudiée dans la section «Application à la maintenance des voies de chemin de fer». Trois séries de 500 données sont simulées indépendamment. Les résultats de l'estimation des paramètres sont donnés dans la table 2, la première colonne correspondant aux vraies valeurs des paramètres, les colonnes suivantes aux valeurs estimées pour les trois séries de données. Les valeurs initiales de l'algorithme EM sont différentes pour les trois séries.

| | Vraies valeurs | Estimateurs série 1 | Estimateurs série 2 | Estimateurs série 3 |
|--------|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| a_1 | 0.0330 | 0.0342 | 0.0326 | 0.0340 |
| b_1 | 13.5 | 14.14 | 13.16 | 13.43 |
| a_2 | 0.0350 | 0.0357 | 0.0361 | 0.0385 |
| b_2 | 20 | 20.25 | 20.54 | 21.28 |
| ρ | 0.5296 | 0.5214 | 0.5257 | 0.5027 |

Table 2 : Résultats d'estimations.

On constate que l'estimation de ρ obtenue par l'algorithme EM est de bonne qualité. Cet algorithme ne semble pas sensible aux valeurs initiales, tout au moins si α_3 n'est pas trop petit.

Application à la maintenance des voies de chemin de fer

L'évolution des deux indicateurs NL et NT de la géométrie d'une voie de chemins de fer est modélisée par un processus Gamma bivarié.

La figure 2 montre les défauts qui sont mesurés par ces indicateurs. Le nivellement (la géométrie) de la voie est mesuré grâce au TGV de mesure (IRIS320) ou grâce à la voiture MAUZIN avec un pas d'inspection constant fixé en avance et selon plusieurs niveaux (cf. table 3). Dans le présent article, nous nous intéressons aux indicateurs de MAUZIN synthétiques, qui résument la qualité de la voie. En effet, les interventions planifiées en fonction de ces indicateurs nécessitent un délai avant intervention (planification, préparation, ...). D'où l'intérêt d'estimer le temps jusqu'à la prochaine intervention à l'aide de la méthodologie proposée dans cet article. Les interventions sur la géométrie de la voie sont notamment le bourrage (compactage du ballast sous les traverses), le relevage (ajout du ballast neuf) ou le remplacement de ballast.

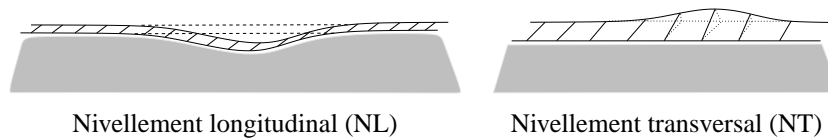


Figure 2 – Défauts de nivellement

| | Type de défauts | Critères |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| MAUZIN classique | ponctuels | sécurité |
| MAUZIN allongé | 30 mètres | sécurité / confort |
| MAUZIN synthétique | 200 / 1000 mètres | qualité |

Table 3 : Les indicateurs de la géométrie de la voie

Avec le développement de ses systèmes de surveillance, la SNCF dispose de données de plus en plus abondantes, et, pour un même système (ici une voie ferrée), il arrive fréquemment que l'on dispose de données multi-variées liées à différents indicateurs. Ici une base de données très abondante existe : environ 10 000 données pour le couple (NL-NT), correspondant à une portion de la ligne à grande vitesse Paris-Lyon. Par ailleurs, ces deux indicateurs étant observés simultanément lors du passage d'un véhicule d'inspection (la voiture MAUZIN ou IRIS 320) et étant améliorés lors des mêmes opérations de maintenance, baser une politique de maintenance préventive sur les deux indicateurs ou sur le seul NL est, d'un point de vue pratique, tout à fait équivalent. D'où l'intérêt de cette étude, qui peut permettre de proposer un aménagement de la politique de maintenance existante très simple à mettre en œuvre.

Le processus choisi dans cette article pour la modélisation admet des processus Gamma univariés comme processus marginaux, ce qui correspond à l'avis des experts concernant à la fois l'indicateur NL et l'indicateur NT (voir Meier-Hirmer *et al.* 2009 pour le NL).

D'un côté, les interventions doivent être effectuées avant que les indicateurs ne dépassent un certain seuil. D'un autre côté, les interventions coûtent cher et ne peuvent pas être effectuées en nombre illimité. En effet, elles réduisent la disponibilité (il faut du temps pour pouvoir intervenir sur la voie) et la tenue à long terme de la voie ferrée (trop de bourrage par exemple peut augmenter la vitesse de dégradation de la voie).

En utilisant la méthode d'estimation de la section précédente sur des données provenant de la ligne Paris-Lyon, on obtient les estimateurs $\hat{a}_1 = 0.0355$, $\hat{b}_1 = 19.19$, $\hat{a}_2 = 0.0387$, $\hat{b}_2 = 29.72$, $\hat{\rho} = 0.5262$. Les deux indicateurs, NL et NT, ne sont que légèrement corrélés. D'après les réflexions de la section «Le processus Gamma bivarié» il est donc important de tenir compte du τ^B .

Les seuils de sécurité usuels sont $s_1 = 0.9$ pour NL et $s_2 = 0.75$ pour NT. Avec ces valeurs, les temps de prochaine intervention $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ et τ^B sont représentés sur la figure 3 en fonction de x_2 avec x_1 fixé ($x_1 = 0.4$).

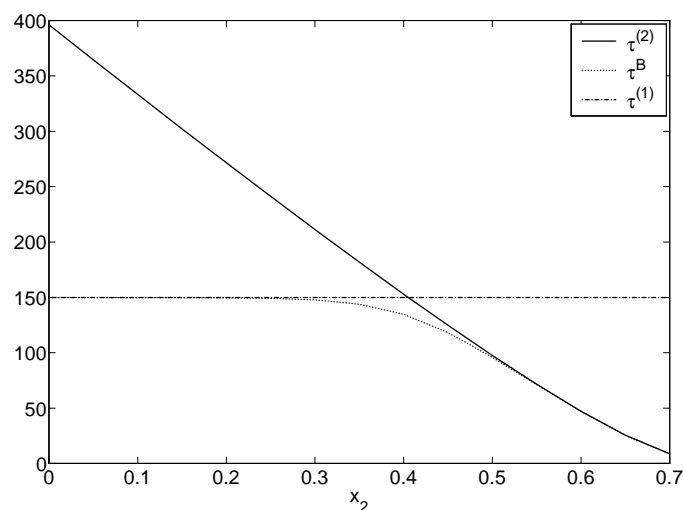


Figure 3 – $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ et τ^B en fonction de x_2 avec $x_1 = 0.4$

Si l'on ne prend en compte que x_1 , le temps entre l'inspection et l'intervention vaut $\tau^{(1)} = 150$. Si $x_2 = 0.4$, alors $\tau^{(2)} = 152.9$, $\tau^U = 150$ et $\tau^B = 134.7$. Dans ce cas, la date d'intervention prenant en compte la structure bivariée pour NL et NT est 15 jours plus tôt que celle ne prenant en compte que NL. On voit sur la figure 3 que si x_2 est assez grand (approximativement supérieur à 0.3), τ^B est significativement plus petit que $\tau^{(1)}$. Ainsi pour $x_2 = 0.5$, on a $\tau^B = 95.9$ ($\tau^{(2)} = 97.5$) et la différence est de 54 jours. Si $x_2 = 0.6$, on obtient $\tau^B = 47.1$ ($\tau^{(2)} = 47.2$) et la différence est de 103 jours. Si x_2 est dans une plage autour de 0.4 (approximativement entre 0.3 et 0.5), τ^B est significativement plus petit que τ^U . En conclusion, on peut observer que si x_1 n'est pas trop proche de x_2 , la valeur $\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ semble raisonnable, contrairement à la valeur couramment utilisée $\tau^{(1)}$. Si x_1 est proche de x_2 , τ^U est plus grand que τ^B et il est raisonnable d'utiliser τ^B .

Conclusion

Un processus Gamma bivarié est utilisé pour modéliser l'évolution de deux indicateurs de détérioration. Dans l'optique de la mise en place d'une maintenance préventive, le temps entre l'inspection et l'intervention préventive est calculé de manière optimale en prenant en compte la structure bivariée. On constate que ce temps est une fonction croissante du coefficient de corrélation. Il est plus petit lorsque l'on prend en compte la dépendance. Des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle sont calculés.

Cette modélisation est utilisée sur deux indicateurs de détérioration de voies de chemin de fer : le NL et le NT.

Les résultats montrent, comme on pouvait l'attendre, qu'il est plus sécuritaire d'utiliser une politique de maintenance basée à la fois sur l'observation du NL et du NT. Ils montrent aussi que, plus les indicateurs sont liés, moins la connaissance des deux (au lieu d'un seul) n'apporte d'information supplémentaire, et moins la différence est importante entre la date de la prochaine intervention liée à un seul ou à deux indicateurs. *A contrario*, moins les indicateurs sont liés (et à l'extrême limite indépendants), plus il faut être attentif au niveau des deux et non pas d'un seul. Dans le cas des voies ferrées, les indicateurs NL et NT ne sont que partiellement corrélés. Il est donc important de se rendre compte de la différence entre $\tau^{(1)}$, le temps optimal basé sur un seul indicateur et τ^B le temps optimal du modèle bivarié. Dans certaines situations, l'utilisation d'un seul indicateur peut mener à un choix erroné. Ceci montre l'intérêt d'utiliser un modèle bivarié.

Il reste à définir une politique de maintenance optimale. Par exemple, on pourrait définir deux seuils de dégradation, un pour chaque indicateur, dont le dépassement lors d'une inspection déclenche une maintenance préventive et choisir ces seuils de manière à minimiser le coût total de maintenance et d'inspection.

Références

- Buijs, F.A., Hall, J.W., van Noortwijk, J.M. and Sayers, P.B., 2005, Time-dependent reliability analysis of flood defences using gamma processes, in G. Augusti, G.I. Schuëller, and M. Ciampoli, editors, *Safety and Reliability of Engineering Systems and Structures ; Proceedings of the Ninth International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR), Rome, Italy*, p. 2209-2216. Rotterdam : Millpress.
- Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B., 1977, Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39, pp. 1-38.
- Devroye, L., 1986, *Non-uniform random variate generation*. Springer.
- Meier-Hirmer, C., Riboulet, G., Sourget, F. and Roussignol, M., 2009, Maintenance optimization for a system with a gamma deterioration process and intervention delay : application to track maintenance, *Journal of Risk and Reliability*, 223, 3, p.189-198.
- Mercier, S., Meier-Hirmer, C. and Roussignol, M., 2009, Modelling track geometry by a bivariate gamma wear process, with application to maintenance, *Risk and Decision Analysis in Maint. Optimization and Flood Management (M.J. Kallen and S. P. Kuniewski, eds.)*, IOS Press, Delft.
- van Noortwijk, J.M., 2009, A survey of the application of gamma processes in maintenance, *Reliability Engineering & System Safety*, 94 (1), p. 2-21.